G. Wussing

Leipzig 1971

I

Untersuchungen zur Neugestaltung der Gleichungslehre in den Klassen 7 bis 10 der allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule mit besonderer Berücksichtigung der Entwicklung geistiger Fähigkeiten

Dissertation zur
Promotion A

Gerlinde W u ß i n g
geb. am 22. März 1929 in Brünnlitz

Karl-Marx-Universität Leipzig
Sektion Pädagogik/Psychologie

Angenommen durch Beschluß
vom 30.3.1971

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Inhaltsverzeichnis

1.	Begründung und Zielstellung	1
2.	Der Lehrgang	8
2.1.	Grundlagen	8
2.1.1.	Vorbemerkungen zum Lehrgang "Gleichungen"	8
2.1.2.	Zur Auswahl der Begriffe	10
2.1.3.	Die Lehrpläne	15
2.1.4.	Zielvorstellung und Leitprinzipien	18
2.1.5.	Der Plan des Lehrgangs	22
2.1.6.	Die Stoffverteilungspläne	23
2.1.7.	Die Lehrmaterialien	24
2.2.	Darstellung des Lehrgangs "Gleichungen" für die Klassen 7 bis 10	27
2.2.1.	Der Lehrgang 7. Klasse	27
2.2.1.1.	Vorgaben aus früheren Stoffgebieten	27
2.2.1.2.	Vorarbeiten	27
2.2.1.3.	Gleichung, Ungleichung	39
2.2.1.4.	Äquivalente Umformungen für Gleichungen ersten Grades mit einer Variablen	47
2.2.1.5.	Weiterführung des Versuchs	60
2.2.2.	Der Lehrgang 8. Klasse	62
2.2.2.1.	Vorgaben aus anderen Stoffgebieten	62
2.2.2.2.	Gleichungen mit Klammern oder Bruchtermen, die auf eine lineare Gleichung mit einer Variablen führen	63
2.2.2.3.	Lineare Gleichungen, in denen außer der Gleichungsvariablen noch Formvariablen auftreten	73
2.2.2.4.	Weiterführung des Versuchs	79
2.2.3.	Der Lehrgang 9. Klasse	79
2.2.3.1.	Vorgaben aus früheren Stoffgebieten	79
2.2.3.2.	Gleichungen mit Bruchtermen, die auf eine lineare Gleichung mit einer Variablen führen	80
2.2.3.3.	Systeme linearer Gleichungen	85
2.2.3.4.	Quadratische Gleichungen	97
2.2.3.5.	Weiterführung des Versuchs	108

2.2.4. Der Lehrgang 10. Klasse 109
2.2.4.1. Ausgangssituation 109
2.2.4.2. Weiterführung des Versuchs 109
2.2.4.3. Spätkontrolle 109

2.3. Die Arbeitsgemeinschaft "Gleichungen und Ungleichungen" für die 8. Klasse 110
2.3.1. Zielstellung 110
2.3.2. Der Stoffverteilungsplan der Arbeitsgemeinschaft .. 111
2.3.3. Bemerkungen zur Stoffbehandlung 111

3. Spezielle methodische Grundlagen 112
3.1. Zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten 112
3.1.1. Zur Begriffsbestimmung von "geistiger Fähigkeit" .. 113
3.1.2. Zum Problem "geistige Tätigkeiten" 114
3.1.3. Zum Katalog geistiger Tätigkeiten der Schüler im Fachunterricht der Klassen 5 bis 10" 114
3.1.4. Die Tabelle der Tätigkeiten für das Stoffgebiet "Gleichungen" 117

3.2. Überblick über die Aufgabenstellungen des Stoffgebiets mit Hilfe von Strukturbildern 120
3.2.1. Grundaufgaben 122
3.2.2. Zusammengesetzte Aufgaben 126

3.3. Der Einsatz methodischer Hilfsmittel zur Steuerung des Tätigkeitsvollzugs 129
3.3.1. Algorithmen und algorithmische Vorschriften 130
3.3.2. Handlungsvorschriften 134
3.3.2.1. Die Handlungsvorschrift H_1 135
3.3.2.2. "Unterprogramme" zu H_1 136
3.3.2.3. Die Handlungsvorschrift H_2 136
3.3.3. Zur Behandlung der übrigen Aufgabenstellungen 137

3.4. Beispiele für spezielle Aufgabenfolgen und Übungskomplexe auf der Grundlage der Strukturbilder 138
3.4.1. Aufgabenfolgen und Übungskomplexe zu Ungleichungen 139
3.4.2. Anleitungen zum Aufstellen spezieller Übungskomplexe 142

4. Die unterrichtspraktischen Untersuchungen 151

4.1. Die Organisation 151
4.1.1. Versuchsklassen 151
4.1.2. Vergleichsklassen 152
4.1.3. Arbeitsgemeinschaft 152
4.1.4. Weitere Untersuchungen 152
4.1.5. Die Unterrichtenden 152
4.1.6. Statistische Angaben zur Organisation 153

4.2. Die Gesamtauswertung 155
4.2.1. Die Durchschnitte der Schuljahresendzensuren für Versuchs- und Vergleichsklassen 155
4.2.2. Die Durchschnitte der Zensuren der Kontrollarbeiten des ersten uns zweiten Versuchs 158
4.2.2.1. Vergleich der Durchschnitte der Zensuren der Kontrollarbeiten für Versuchsklassen des ersten und des zweiten Versuchs 158
4.2.2.2. Vergleich der Durchschnitte der Zensuren der Kontrollarbeiten für die Versuchs- und Vergleichsklassen des ersten und des zweiten Versuchs 160
4.2.3. Die Fehleranalysen für die Kontrollarbeiten 162

4.3. Die Auswertung nach Problemkomplexen 164
4.3.1. Auswertung für das Strukturbild IIa 164
4.3.2. Auswertung für das Strukturbild III 167
4.3.3. Auswertung für das Strukturbild IV 170
4.3.4. Zur Auswertung für die übrigen Strukturbilder 174

4.4. Zur Auswertung der Arbeitsgemeinschaft 175

5. Schlußfolgerungen 179
5.1. Zum Inhalt und Umfang des Stoffes 179
5.2. Zur sprachlichen Darstellung von Sachverhalten der Gleichungslehre 182
5.2.1. Zur Situation in den Versuchsklassen 182
5.2.2. Zur Situation in den Vergleichsklassen 185

5.3. Zur methodischen Gestaltung des Unterrichtes 187
5.3.1. Zu Zielvorstellung und Leitprinzipien 187
5.3.2. Zur Lernhaltung in den Versuchsklassen 188
5.3.3. Zum Einsatz der methodischen Hilfsmittel 189
5.3.4. Zum Einsatz von Lehrmaterialien 190
5.3.5. Gedanken zur Gestaltung von Lehrbüchern 192

5.4. Zur Auswirkung auf die Praxis 195
5.4.1. Lehrerweiterbildung 196
5.4.2. Ausbildung von Studenten 197
5.4.3. Unmittelbare Umsetzung in die Schulpraxis 197
5.4.4. Veröffentlichungen 198

6. Gesamtzusammenfassung 199

1. Problemlage und Zielstellung

Im Beschluß "Zur Verbesserung und weiteren Entwicklung des Mathematikunterrichts in den allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen der DDR" /2/ wird betont, daß eine umfassende und hohe mathematische Bildung immer mehr zu einem wesentlichen Bestandteil der allseitigen Bildung des Menschen der sozialistischen Gesellschaft wird.

Inhalt und Qualität des Mathematikunterrichts mußten daher ständig und planmäßig verbessert werden. Ausgehend vom "Gesetz über das einheitliche sozialistische Bildungssystem" /55/ wurden deshalb konsequent durch Fachkonzeption /57/, zahlreiche Publikationen in der Fachzeitschrift und deren Weiterentwicklung der Lehrpläne und Lehrbücher Leitlinien für die inhaltliche und methodische Neugestaltung unseres Mathematikunterrichts geschaffen.

Die folgende Arbeit stellt sich das Ziel, mögliche Erfahrungen, Anregungen und Hilfen zur Durchsetzung der neuen Lehrpläne /71/ und /72/ zu liefern. Insbesondere geht es uns dabei um Möglichkeiten der Entwicklung geistiger Fähigkeiten im Mathematikunterricht.

In Dokumenten von Partei und Regierung und in einer Vielzahl pädagogischer Veröffentlichungen wird immer nachdrücklicher die Forderung nach einer planmäßigen Entwicklung der geistigen Fähigkeiten der Schüler erhoben. J. Lompscher schreibt dazu: "Das Problem der Entwicklung geistiger Fähigkeiten ist unseres Erachtens eines der Grundprobleme der weiteren Entwicklung unseres Bildungssystems..." /77, S. 1/. Man muß aber natürlich bei allem Nachdruck, den die Forderung nach gezielter Entwicklung geistiger Fähigkeiten verdient, dieses Problem immer im Zusammenhang mit der Entwicklung der sozialistischen Gesamtpersönlichkeit zu sehen. Die Herausbildung fester

Kenntnisse und Fertigkeiten , sowie die Entwicklung des Bewußtseins und die Herausbildung sozialistischer Verhaltensweisen und Charaktereigenschaften gehören sowohl zur allseitigen Entwicklung der Persönlichkeit wie die Entwicklung von geistigen Fähigkeiten. Diese Sicht auf die Gesamtpersönlichkeit ist bei allen speziellen Untersuchungen zur Fähigkeitsentwicklung unbedingt zu beachten.

Der Mathematikunterricht bietet vielfältige Möglichkeiten zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten. Die neuen Lehrpläne /71/ und /72/ stellen in ihren "Zielen und Aufgaben" und "Hinweisen zur methodischen und organisatorischen Gestaltung des Unterrichts" klare Forderungen hinsichtlich der zu entwickelnden Fähigkeiten. Auch die Unterrichtshilfen enthalten ebenfalls Hinweise. Methodische Anleitungen und Erfahrungen, wie die Fähigkeitsentwicklung erfolgen muß, findet man allerdings kaum. Es ist deshalb ein notwendiges Vorhaben, Probleme der Fähigkeitsentwicklung verstärkt zum Ausgangspunkt methodischer Untersuchungen zu machen. Solche Untersuchungen müssen für die Lehrer die nötigen Anleitungen für eine optimale Erfüllung der Lehrplanforderungen liefern.

Hier soll der Versuch unternommen werden, an Hand eines speziellen Stoffgebietes, nämlich der Gleichungslehre, methodische Hinweise und Hilfen für die Fähigkeitsentwicklung bereitzustellen.

In seinem Lehrplan für die Klassen 9 und 10 sagt er: "Der Mathematikunterricht soll wesentlich dazu beitragen, das Verständnis der Schüler für die Gesetzmäßigkeiten in Natur und Gesellschaft zu erhöhen und ihnen die für jeden Bürger unseres Staates erforderliche geistige Beweglichkeit zu vermitteln. Diese Persönlichkeitseigenschaft ist als [illegible] Komponente der Fähigkeit zu betrachten, in unserem Staat effektiv mitzuarbeiten, mitzuplanen und mitzuregieren. [illegible]."/72, S.9/

Wir meinen, daß man von Mathematikunterricht die geistige Beweglichkeit der Schüler z. B. dadurch fördern kann, daß

ein besonderes Gewicht legt auf das Erkennen von Zusammenhängen zwischen den einzelnen Begriffen und Inhalten und Methoden jedes einzelnen Stoffgebiets und der Stoffgebiete untereinander.

Der Entwicklung der Befähigung, Zusammenhänge zu erkennen, wurde in der Vergangenheit meist zu wenig Beachtung geschenkt. S. Rosenberg schreibt dazu: "Die spezifische Fähigkeit des Schülers, operativ zu denken, wird sich im Mathematikunterricht bei den Anwendungen und bei der Wiederholung zeigen. Wir stellen häufig fest, daß es den Schülern an dem Vermögen fehlt, die Dinge in Zusammenhang zu sehen und miteinander zu verbinden." Und er führt weiter dazu aus: "Auf der Analyse der traditionellen Methode - der Autor meint damit diejenige Vorgehen im Unterricht, bei dem die einzelnen Begriffe, Lehrsätze, Rechenoperationen, Methoden nacheinander durchgenommen und geübt werden, um erst in einer Weise, nach welcher ein nachfolgender Gegenstand erst dann dran kommt, wenn der vorhergehende auch gefestigt ist - ist der Schluß zu ziehen, daß die Lehrgegenstände im Mathematikunterricht von vornherein in ihren wesentlichen Zusammenhängen, in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit und Veränderung gesehen werden, daß das Gemeinsame, Verbindende wie das Gemeinschaftliche von den Schülern erkannt und ihnen bewußt wird." /98; S. 760/

In der vorliegenden Arbeit sollen theoretische und unterrichtspraktische Probleme dargestellt werden, die bei der Entwicklung geistiger Fähigkeiten und insbesondere der Fähigkeit, Zusammenhänge zu erkennen, auftreten. Der Zugang zu den Fähigkeiten erfolgt über die Tätigkeiten im Stoffgebiet "Gleichungen". Ein solches Vorgehen ist möglich, denn geistige Fähigkeiten entwickeln sich in der Tätigkeit und sind zugleich aber auch wieder Voraussetzung für die erfolgreiche Ausübung geistiger Tätigkeiten.

Wir stützen uns auf unterrichtspraktische Untersuchungen, die an Hand eines selbst zusammengestellten Lehrganges "Gleichungen für die Klassen 7 bis 10" in fünf aufeinanderfolgenden Schuljahren (1964/65 bis 1968/69) durchgeführt wurden. (Vgl. Tabelle 1)

Die Auswahl des Stoffgebietes "Gleichungen" erfolgte dabei aus folgenden Gründen. Erstens: Das Stoffgebiet erstreckt sich über mehrere Schuljahre und gibt damit die Möglichkeit, langfristige Untersuchungen durchzuführen. Das ist für die Fähigkeitsentwicklung ein sehr wesentlicher Gesichtspunkt, da eine planmäßige und bewußte Entwicklung geistiger Fähigkeiten nur über einen längeren Zeitraum hinweg erfolgen kann. Zweitens: Zur Zeit der Vorarbeiten im Schuljahr 1963/64 stand fest, daß die bisherige Behandlungsweise der Gleichungslehre den künftigen Anforderungen an einen wissenschaftlich einwandfreien Mathematikunterricht nicht mehr gerecht werden konnte. Es machte sich eine völlige Neugestaltung des Stoffgebietes auf der Grundlage von Mengenlehre und mathematischer Logik erforderlich. Diese notwendige inhaltliche Umgestaltung eröffnete besonders günstige Möglichkeiten für die Fähigkeitsentwicklung. Es war also ein neuer Lehrgang der Gleichungslehre auszuarbeiten, in dem die sachlich-fachlichen Mängel bisheriger Behandlungsweisen überwunden und die sich vom Inhalt her anbietenden Möglichkeiten zur Fähigkeitsentwicklung durch eine geeignete methodische Gestaltung des Unterrichts möglichst gut genutzt wurden. Das Suchen nach geeigneten Hilfmitteln zur Steigerung der Effektivität des Unterrichts bot sich an.

Es waren aber auch Gesichtspunkte zu beachten, die sich für das Vorhaben als negativ erweisen konnten. Erstens: Bei unterrichtspraktischen Untersuchungen, die sich über fünf Schuljahre erstrecken, ist die Zugriffszeit für die

Praxis sehr lang. Darum hat auch die Tätigkeit einer intensiven Vortragstätigkeit über Teilergebnisse wenig Nutzen. Abschließende Aussagen sind erst nach fünf bis sechs Jahren zu erwarten.
Zweitens: Untersuchungen durch Einzelpersonen können sich nur auf eine relativ geringe Anzahl von Schülern erstrecken.

Wir meinen nach Abschluß der Untersuchungen, daß die Vorteile die Nachteile aufgewogen haben. Wir können jetzt über unterrichtspraktische Ergebnisse an Hand einer durchgehenden Behandlung eines Stoffgebietes berichten, bei der zweimal vier Jahre lang mit jeweils gleichbleibender Schülergesamtheit gearbeitet wurde.

Die Dissertation von K. Ligner /52/, die 1965 zum Thema: "Untersuchungen über Möglichkeiten der mengentheoretischen Durchdringung des Unterrichtsgebietes 'Gleichungslehre' in den Klassen 7 und 8" erschienen ist, erbrachte eine gründliche Auswertung der vorhandenen Literatur, so daß wir darauf verzichten können. Sie führte weiterhin an Hand von unterrichtspraktischen Untersuchungen in 7. und 8. Klassen den Nachweis, daß die Behandlung der Gleichungslehre auf mengentheoretischer Grundlage prinzipiell möglich und vorteilhaft ist und zeigte eine Vielfalt methodischer Probleme auf. Die Ergebnisse der Untersuchungen von K. Ligner konnten wir in unseren Untersuchungen in den 7. und 8. Klassen, die an Hand eines eigenen Lehrgangs mit einem Jahr Phasenverschiebung verliefen, weitgehend bestätigen. Für die 9. Klassen gibt K. Ligner zwar Hinweise, konnte aus technischen Gründen seine Untersuchungen aber nur bis zur 8. Klasse durchführen. Für sein Anliegen ist das auch ausreichend. Wir brauchten für unsere Zwecke dagegen gerade auch die Auswirkungen der neuen Behandlungsweise in den 7. und 8. Klassen auf die weitere Behandlung in den 9. und 10. Klassen. Dabei war die Möglichkeit der mengentheoretischen Durchdringung der Gleichungslehre dann weniger Untersuchungsgegenstand als Voraussetzung.

Unser Untersuchungsgegenstand war die methodische Aufbereitung des Stoffes mit besonderer Berücksichtigung der zu erlernenden Tätigkeiten als Voraussetzung für die Entwicklung bestimmter geistiger Fähigkeiten.
Zur Untersuchungsmethode zählen wir die Begründung der Untersuchungsversuche, den Einsatz methodischer Hilfsmittel und die speziell für unsere Untersuchungen entwickelten Auswertungsverfahren.
Für die unterrichtspraktischen Untersuchungen wird dann auf der Grundlage von Leitlinien und Zielvorstellungen ein Lehrgang vorgelegt. Es werden dann spezielle methodische Hilfsmittel, Strukturbilder und Handlungsvorschriften genannt, entwickelt, und es werden weiterhin konkrete Hinweise für das Zusammenstellen von typischen Aufgabenfeldern und Übungskomplexen gegeben.
Die Auswertung der Untersuchungen erfolgt mittels spezieller Fehleranalysen, die ein Zurückverfolgen der Fehlerursachen bis zu den Tätigkeiten hin ermöglichen. An Hilfsmitteln zur deskriptiven Statistik werden arithmetischer und gewogener arithmetischer Mittel, prozentuale Häufigkeiten und graphische Darstellungen durch Streckenzüge verwendet. Vergleiche zwischen den Ergebnissen des ersten und des zweiten Durchlaufen der Untersuchungen (1964/65 bis 1967/68 und 1965/66 bis 1968/69) und zwischen den Ergebnissen von Versuchs- und Vergleichsklassen werden durch ein statistisches Prüfverfahren, nämlich den t-Test, gesichert.
Inzwischen sind die neuen Lehrpläne für die Klasse 6 bis 8 /71/ mit Wirkung vom 1. September 1969 in Kraft getreten, und am 1. September 1970 erlangt der neue Lehrplan für die 9. Klasse /72/ Gültigkeit. Wie an späterer Stelle (Vgl. Kap. 2.1.3) ausführlich dargelegt wird, kann man die vorliegenden Untersuchungen, obwohl sie auf der Grundlage der präzisierten Lehrpläne /68/ bzw. /69/ erst in der 7. Klasse einsetzten und auch nicht in allen Punkten mit der Konzeption der neuen Lehrpläne voll übereinstimmen, als eine methodische Vorarbeit für die neuen Lehrpläne ansehen.

Durch die methodischen Anregungen und Hilfen will die Arbeit einen unmittelbaren Beitrag zur Realisierung der neuen Lehrpläne leisten.

Mit der besonderen Akzentuierung der Fähigkeitsentwicklung ordnen wir uns in das Forschungsvorhaben der Forschungsgemeinschaft "Entwicklung geistiger Fähigkeiten" der Sektion Pädagogik/Psychologie ein. Seine theoretischen Konzeptionen und Untersuchungsergebnisse waren neben einer Reihe weiterer Veröffentlichungen aus dem In- und Ausland Ausgangspunkt und Grundlage für unser Vorgehen. (Vgl. Kapitel 3.1)

2. Der Lehrgang "Gleichungen"

2.1. Grundlagen

2.1.1. Entwicklung des Lehrganges "Gleichungen"

Unser Mathematikunterricht hat in den letzten Jahren, insbesondere nach dem Beschluß des Politbüros des ZK der SED und des Ministerrates vom 17. Dezember 1962 /8/, beachtliche Fortschritte gemacht. In einem Interview der Zeitschrift Mathematik in der Schule anläßlich der fünfjährigen Wiederkehr des Tages, an dem der Mathematikerschluß erlassen wurde, konnte E. Spigenfind einschätzen: "Das Arbeiten mit Variablen, der Umgang mit Gleichungen und Ungleichungen, die exakte Formulierung unter Verwendung der mengentheoretischen Fachtermini, das Führen von geraden Beweisketten, das Arbeiten mit Umgebungen und auf die Elemente der mathematischen Logik und Vieles andere mehr sind in der historisch kurzen Frist von weniger als fünf Jahren zur Selbstverständlichkeit im Mathematikunterricht der Unterstufe geworden." /34, S.4/

Ab 1964 waren in den Klassen 1 bis 3 jahrgangsweise neue Lehrpläne eingeführt worden. Aufbauend darauf traten gemäßigte Lehrpläne für die Klassen 4 und 5 in Kraft. Ab September 1969 wird in den Klassen 6 bis 8 nach den neuen Lehrplänen /71/ unterrichtet. Damit hat sich auch speziell in der Gleichungslehre vieles gewandelt. Über die Notwendigkeit und die Möglichkeit einer Behandlung der Gleichungslehre auf mengentheoretischer Grundlage gibt es heute keine Zweifel mehr. Bezeichnungen wie "Gebotsmenge", "Definitionsgleichung", "Lösungsmenge", "Lösungsmenge" und andere sind aus unserem neuen Lehrbuch nicht wegzudenken. Die neuen Lehrpläne orientieren auf wissenschaftlich exakte Begriffsbildungen und Aufgabenstellungen.

Anders lag die Sache zur Zeit der Ausarbeitung des ersten Unterrichtsversuches für die siebenten Klassen im Schuljahr 1963/64 und zur Zeit der ersten schulpraktischen Erprobung im Schuljahr 1964/65. Einige Veröffentlichungen mit recht unterschiedlichen Begriffsbildungen /17/, /18/, /19/, /20/, /51/, /105/, /116/, /118/, magere Hinweise auf unterrichtspraktische Erfahrungen – gewonnen in Spezialeinrichtungen – viel Voreingenommenheit und Skepsis bei den Mathematiklehrern, das war die Ausgangssituation.

Mit der zielstrebigen Entwicklung unseres Mathematikunterrichtes auf der Grundlage von Bildungsgesetz und Mathematikkonzeption und mit den Anregungen durch die Forschungsgemeinschaft "Fähigkeitsentwicklung" hat sich auch das Anliegen der vorliegenden Arbeit schrittweise präzisiert. Ging es zunächst, d. h. in den Schuljahren 1964/65 und 1965/66, auch noch darum, die Notwendigkeit der Umgestaltung der Gleichungslehre zu beweisen und zu zeigen, daß der neue, der wissenschaftlich fundierte Weg für die Schüler nicht nur faßlich, sondern sogar vom Gesamtanliegen des Mathematikunterrichtes her rationeller ist, weil er durchgängige, für die gesamte Mathematik gültige Gedankengänge und Betrachtungsweisen lehrt, so konzentrierte sich das Anliegen im Verlauf der Untersuchungen immer mehr auf die Verbesserung der methodischen Gestaltung des Stoffgebietes, vor allem auf die Entwicklung geistiger Fähigkeiten und die Erhöhung der Effektivität des Unterrichtes.

Diese Entwicklung wurde unterstützt durch eine Vielzahl weiterer in- und ausländischer Veröffentlichungen. Aus der Fülle der einschlägigen Arbeiten zur Umgestaltung der Gleichungslehre seien hier wenigstens diejenigen aufgeführt /39/, /42/, /46/, /48/, /50/, /52/, /67/, /74/, /75/, /90/, /104/, /115/, /117/, die im Laufe der fünfjährigen Untersuchungen einen mehr oder weniger starken Einfluß auf die Vervollständigung und Präzisierung des Lehrganges hatten. Hervorzuheben sind dabei die Arbeiten von K. Lipner /50/, /52/, weil diese im Gegensatz zu anderen Darstellungen über Unterrichtsversuche an

Spezialeinrichtungen und einer erfolgreichen Erprobung eines Lehrganges der Gleichungslehre in einzelnen und weiteren Klassen unserer allgemeinbildenden polytechnischen Oberschule bestätigt werden konnte. Auch hinsichtlich einer ausführlichen Begründung der Notwendigkeit, die Gleichungslehre auf mengentheoretischer Grundlage zu behandeln, kann auf die Arbeit /52/ verwiesen werden.

Da zur Zeit der Vorbereitung unserer unterrichtspraktischen Untersuchungen kein geeigneter, geschlossener Lehrgang der Gleichungslehre für die polytechnische Oberschule vorlag, mußte ein solcher ausgearbeitet werden. (Vgl. Kap. 2.2.) Wir bringen diesen Lehrgang vor den Ausführungen zur Fähigkeitsentwicklung (vgl. Kap. 3.1.), weil er die stoffliche Grundlage und den Ausgangspunkt für alle theoretischen und praktischen Untersuchungen bildete. Das bedeutet aber keine Unterordnung oder ein Nebeneinander von stofflichen Überlegungen und solchen zur Fähigkeitsentwicklung; diese bilden vielmehr eine dialektische Einheit, wie die beiden Kapitel 2. und 3. zeigen werden.

2.1.2. Zur Auswahl der Begriffe

Bei der Auswahl der Begriffe für den Lehrgang und speziell bei der Zahl der neu einzuführenden Begriffe wurde nach zwei Hauptgesichtspunkten vorgegangen:

1) Die Begriffsbildungen und Denkweisen einer modernen Gleichungslehre haben ihre Grundlage in der Mengenlehre und der mathematischen Logik,

2) Es sind möglichst wenig neue Begriffe einzuführen. Die Auswahl hat so zu erfolgen, daß sich die neu eingeführten Begriffe für den gesamten Lehrgang eignen bzw. erweiterungsfähig sind.

Über die Tatsache, daß eine wissenschaftlich einwandfreie Gleichungslehre nicht zu trennen ist von Begriffen wie "Grundmenge", "Variable", "einander äquivalente Gleichungen",

"Lösungsmenge" und meinen, sind sich alle in- und ausländischen Autoren einig. Bei der Auswahl des einen speziellen Lösungsbegriffes aus dem Begriffssystem dagegen gibt es unterschiedliche Meinungen. Dasselbe gilt auch für die Formulierungen der einzelnen Definitionen und für die Darstellungsformen und Bezeichnungsweisen. Neben den feststehenden fachwissenschaftlichen Grundlagen sind persönliche Akzentuierungen möglich, die auf pädagogischen und psychologischen Erwägungen herrühren.

Wir stützen uns bei den grundlegenden Begriffen auf den Mathematischen Wörterbuch /67/ und die Allgemeine Mengenlehre von D. Klaua /55/.

Darüber hinaus war eine Vielzahl von Fragen zu klären, wie:

- Soll die Bezeichnung 'Unbekannte' statt "Variable" verwendet werden oder soll man sie vermeiden oder soll man beide Bezeichnungen gleichberechtigt verwenden ?
- Soll man von "freien" und "gebundenen" Variablen sprechen oder soll man hier den inhaltlichen Sachverhalt ohne verschiedene Begriffe klären ?
- Soll man mit dem Begriff 'Aussageform' arbeiten oder kommt man besser ohne ihn aus ?
- Welche der Begriffe "Grundbereich einer Variablen", "Grundbereich einer Variablen", "Grundmenge einer Variablen", "Lösungsgrundmenge der Gleichung" führt man ein ? [1]
- Sollen 'Teilmenge', 'Differenzmenge', 'Durchschnittsmenge', 'Vereinigungsmenge' und 'Produktmenge' sowie die eingeführt werden ?
- Sind die Begriffe 'Definitionsbereich der Gleichung' und "Definitionsbereich eines Terms" nötig ?
- Soll man mit Begriffen wie "offener Term", "geschlossener Term" [2] oder "numerischer Term" [3] arbeiten ?

- Ist es zweckmäßig, die Begriffe "Vollterm", "Teilterm" und "Leerterm" zu benutzen, um eine Einteilung der Terme nach ihrem Definitionsbereich zu haben[4]? -

Somit war einige der Fragen genannt seien, die beim Studium der Publikationen auftauchten.

Es wurde schließlich das "Begriffssystem"[5], das die Tabelle 2 zeigt, gewählt, weil es nach unserer Meinung den Hauptgesichtspunkten hinreichend entspricht. Wie die Untersuchungen ergaben, stellt es eine mögliche und zweckmäßige Auswahl von Begriffen dar.
Bei der Zusammenstellung der Begriffe in Tabelle 2 gelang es zwar nicht, alle Beziehungen zwischen ihnen zu erfassen; einige Zusammenhänge scheinen uns aber dadurch die Anordnung verdeutlicht zu sein. "Teilsysteme" dieses "Begriffssystems" erscheinen später im Rahmen der Strukturbilder (Vgl. Kap. 3.2.) gesondert.

Auf der Grundlage dieser Begriffsübersicht werden als "Variablengrundmengen" stets echte oder unechte Teilmengen der verfassenden, den Schüler bekannten Zahlenmengen auftreten, d. h. in der 7. Klasse Teilmengen der Menge der rationalen Zahlen und von der 8. Klasse an Teilmengen der Menge der reellen Zahlen. Die "Aussagengrundmenge" ergibt sich aus den gegebenen "Variablengrundmengen", gegebenenfalls durch die Bildung von Differenz- bzw. Produktmenge.
Für den Begriff "Teilmenge" wurde im Lehrgang nicht explizit eine Definition angegeben. Es wurde jeweils auf die Elementbeziehung zurückgegangen. Zur Klarstellung der Zusammenhänge erscheint der Begriff trotzdem in unserem "Begriffssystem".

Vergleicht man die hier getroffene Begriffsauswahl mit derjenigen, die den neuen Lehrplänen /74/, /75/ zugrunde liegt, so kann man nicht in allen einzelnen Punkten Übereinstimmung feststellen, wohl aber in den wesentlichen.

Es zeigt sich, daß in den genannten Lehrplänen eine noch geringere Auswahl von Begriffen erscheint als in unserem Lehrgang. Zu einigen damit zusammenhängenden Problemen soll deshalb hier Stellung genommen werden.

Es wird auf den Begriff "Aussageform" verzichtet. Dieser Begriff ist im Rahmen der Gleichungslehre nicht unbedingt erforderlich. Wir halten seine Einführung aber trotzdem für zweckmäßig, weil das Begriffspaar "Aussage" - "Aussageform" einmal für den Zusammenhang "Gleichung (Ungleichung) ohne Variablen" - "Gleichung (Ungleichung) mit Variablen" sehr nützlich ist und zum anderen auch über die Gleichungslehre hinaus Bedeutung hat.

Auch die Begriffe "Differenzmenge", "Produktmenge" und "Vereinigungsmenge" werden nicht verwendet. Sie ließen sich ohne Schwierigkeiten umgehen. Andererseits ist aber auch hier zu sagen, daß man mit ihrer Hilfe typische mathematische Zusammenhänge, die nicht nur in der Gleichungslehre wichtig sind, erfassen kann. Da nach /72/ bei Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen die Lösungsmenge als "Durchschnitt" zu definieren ist, ist nicht ganz einzusehen, daß bei quadratischen Gleichungen auf "Vereinigung" verzichtet wird.

Für eine Einführung des Begriffs "Differenzmenge" sprechen vor allem Gesichtspunkte einer übersichtlichen und korrekten Darstellung des Sachverhalten, dagegen die etwas umständliche und damit leicht zu Fehlern führende [illegible] Darstellung. Wir meinen, daß in den Untersuchungen die Vorteile überwogen.

Der von uns zusätzlich verwendete Begriff "Produktmenge", der in den Versuchsklassen bereits beim Funktionsbegriff eingeführt wurde, erwies sich für unsere Untersuchungen als sehr zweckmäßig bei der Angabe der Lösungsgrundmenge für Systeme von zwei (und mehr) linearen Gleichungen mit zwei (und mehr) Variablen.

Von den möglichen Begriffen bzw. Bezeichnungen "Grundbereich einer Variablen", "Variabilitätsbereich", "Variablengrundmenge", "Lösungsgrund-

menge" wurden die Begriffe "Variablengrundmenge" und "Lösungsgrundmenge" ausgewählt. Die neuen Lehrpläne /71/ und /72/ arbeiten mit den Begriffen "Variablengrundbereich" bzw. "Grundbereich". Und in diesem Zusammenhang wird dann von der "Abhängigkeit der Lösbarkeit beziehungsweise der Anzahl der Lösungen vom gewählten Grundbereich" gesprochen /71, S.2[illegible]/. L. [illegible] schreibt dazu: "Der Grundbereich muß die in der Gleichung auftretenden Zahlen enthalten, und die in den Termen auftretenden Operationen müssen in ihm ausführbar sein." /39, S. 25[illegible]/ "Andernfalls ist der Grundbereich entsprechend abzuändern" /39, S. 256, a.a.O./.

In der Unterrichtshilfe für die 6. Klasse findet man folgende Ausführungen zu dem Problem: "Neben der Bezeichnung "Grundbereich" wird gelegentlich auch "Grundmenge", "Lösungsgrundmenge" oder "Variabilitätsbereich" verwendet. Es erscheint nicht angebracht, in Klasse 6 beim ersten Zusammentreffen mit diesen Begriffsbildungen, die Schüler durch eine Vielzahl von verschiedenen Bezeichnungen für einen Begriff zu verwirren. Daher wird empfohlen, zunächst stets das Wort "Grundbereich" zu benutzen. Das Wort "Bereich" deutet an, daß es sich nicht nur um eine Menge handelt, sondern auch gesichert sein muß, daß die in den Termen auftretenden Verknüpfungen für diese Elemente erklärt sind." /112, S. 1[illegible]/

Die von uns gewählten Begriffe erwiesen sich als sehr zweckmäßig für eine saubere Trennung zwischen den für die einzelnen Variablen vorgegebenen Grundmengen, im Lehrgang Variablengrundmengen oder kurz Grundmengen genannt, und derjenigen Grundmenge, aus der die Lösungen der Gleichung zu suchen sind, der Lösungsgrundmenge der Gleichung. Letztere war dann immer so zu bestimmen, daß die in den Termen auftretenden Verknüpfungen alle erklärt waren. Dazu war in gewissen Fällen eine Differenzmenge zu bilden. Im Falle von Systemen von Gleichungen mit mehreren Gleichungsvariablen ist die Lösungsgrundmenge eine Produktmenge. Da die Lösungsgrundmenge grundsätzlich im ersten Schritt des Lösungsweges zu bestimmen war, wurde damit die Besinnung auf die Art der Lösungen und

auf auszuschließende Elemente zu einem sicheren Bestandteil des Lösungsweges. Das hat mit einer derartigen Begriffsbildung darüber hinaus die Möglichkeit, die Wahl einer solchen Lösungsgrundmenge zu fordern, über der äquivalent umgeformt werden kann. (Vgl. Kap. 2.2.) Wenn man auch im Falle einer Gleichung mit einer Variablen (6. und 7. Kl.) noch mit einem Begriff "Grundbereich" auskommt, so erscheint uns doch im weiteren das gegebenenfalls notwendige Abändern des Grundbereiches durch einen zweiten Begriff besser faßbar. Man könnte auch erwägen, mit "Definitionsbereich der Gleichung" zu arbeiten. Das würde aber die Möglichkeiten der Aufgabenstellungen (Vgl. Kap. 3.2.) einengen.
Bezüglich der Definitionen der Begriffe, wie sie den Schülern gegeben wurden, verweisen wir auf Kapitel 2.2.

2.1.3. Die Lehrpläne

Während der unterrichtspraktischen Untersuchungen galt der präzisierte Lehrplan vom 1963 bzw. 1966 /68/ bzw. /69/. Danach war das Stoffgebiet "Gleichungen" in den Klassen 7 bis 9 zu behandeln. In der Klasse 10 waren dafür keine besonderen Stunden ausgewiesen, von einer ständigen Wiederholung und Anwendung abgesehen.

Nach dem neuen Lehrplan für die Klassen 5 bis 8 /71/ wird bereits in der Klasse 5 mit der Gleichungslehre begonnen. Die vorliegenden Untersuchungen wurden in allgemeinbildenden polytechnischen Oberschulen durchgeführt (Vgl. Kap. 4.1.) und hatten sich stundenmäßig weitgehend in den gültigen Lehrplan einzuordnen. Sie setzten somit auch erst in der 7. Klasse ein.
Wir meinen, daß die Untersuchungen trotzdem als eine Vorarbeit für den neuen Lehrplan anzusehen sind und werden das begründen.

In der Grundkonzeption, die Gleichungslehre auf mengentheoretischer Grundlage zu behandeln, besteht Übereinstimmung.

Wesentliche Unterschiede gibt es in zwei Punkten:

1. Bei Ungleichungen wird nicht bis zur "systematischen Erörterung von Umformungs- und Lösungsverfahren" /72, S. 26/ vorgegangen, sondern nur bis zum Lösen durch inhaltliche Überlegungen.

2. Der Beginn der Stoffbehandlung liegt erst in der 7. und nicht schon in der 6. Klasse. Die Voraussetzungen aus den Klassen 1 bis 5 (bzw. 6) sind jetzt erheblich besser als sie zu Beginn der vorliegenden Untersuchungen im Schuljahr 1964/65 für die 7. Klasse waren.

Die methodischen Erfahrungen, die bei den Untersuchungen gesammelt werden konnten, und die Schlußfolgerungen, die sich daraus ziehen lassen, halten wir für weitgehend übertragbar. Wegen der pädagogischen und psychologischen Besonderheiten der Stoffbehandlung in den 6. Klassen und der abweichenden Situation in den 7. Klassen gilt das vor allem für die Klassen 8 und 9.
Rein stundenmäßig ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen dem Unterrichtsversuch und den neuen Lehrplänen. Im Unterrichtsversuch wurden für die "Vorarbeiten" bis zum systematischen und kalkülmäßigen Lösen linearer Gleichungen mit einer Variablen, also zur Behandlung von "Menge", "Aussage", "Aussageform", "Term", "Gleichung", "Ungleichung", "Lösungsgrundmenge", "Erfüllbarkeit" usw. 13 Stunden (1. Versuch) bzw. 16 Stunden (2. Versuch) benötigt. Rechnet man die im neuen Lehrplan /71/ in der 6. Klasse dafür veranschlagten Stunden zusammen, so kommt man auf etwa die gleiche Stundenzahl. Es sind dort "Menge", "Gleichheit zweier Mengen" und "Aussage" im Rahmen des Kapitels 1.2. "Teilbarkeitssätze" zu behandeln, und man hat dafür etwa 4 Unterrichtsstunden zu veranschlagen. Unter 2.1. "Ordnung gebrochener Zahlen" ist der Begriff "Term" einzuführen, wofür etwa 1 Stunde benötigt wird. Für 3.1. "Einführung in die Gleichungslehre" stehen 7 Stunden zur Verfügung. Rechnet man zusammen, so sind das etwa 12 Stunden.

Auch im weiteren ergibt sich eine gute Übereinstimmung, wenn man auch bei einer solch formalen Betrachtung keinesfalls verkennen darf, daß eine Verteilung des Stoffes über 2 Schuljahre (6. und 7. Klasse) ganz andere verbesserte Möglichkeiten für Wiederholung und Festigung bietet. Eine ganze Reihe von Schwierigkeiten, die sich im Unterrichtsversuch aus der gedrängten Behandlung sehr vieler neuer Begriffe ergaben, werden dadurch voraussichtlich hinfällig werden.

Vergleich der Stundenzahlen

	Präzisierter Lehrplan /69/	Plan des Versuchs	Neu Lehrpläne /71/ und /72/
6. Klasse	-	-	12 Std.
7. Klasse	24 Std.	29 Std. bzw. 32 Std.	21 Std.
8. Klasse	12 Std.	12 Std.	11 Std.
9. Klasse	32 Std.	37 Std.	36 Std.
insgesamt:	68 Std.	78 Std. bzw. 81 Std.	80 Std.

Dabei wurden die Stunden für die Leistungskontrollen, die im Versuch jeweils etwa 6 Wochen nach Abschluß der Stoffbehandlung durchgeführt wurden, nicht mitgerechnet. Dasselbe gilt für die Stunden zur Jahresendwiederholung in der 7. Klasse und für die Leistungskontrollen in der 10. Klasse. Derartige Unterrichtsstunden erscheinen auch in den Angaben aus den Lehrplänen nicht.

2.1.4. Zielvorstellung und Leitprinzipien

Die im präzisierten Lehrplan /50/ auf Seite 5) dargelegten Richtlinien für die Behandlung der Gleichungslehre konnten in keiner Weise als Grundlage für die geplanten Untersuchungen benutzt werden. Hinweise, wie "Das Umformungsgesetz für Gleichungen ist schrittweise, aufgegliedert nach den einzelnen Rechenoperationen, mit Hilfe von Skizze, Modellen und Tafelbild anschaulich zu erarbeiten. Die Lösungsmenge muß von den Schülern als eine gesuchte Zahl ermittelt werden, die die vorgelegte Gleichung erfüllt. Zu dieser Erkenntnis gelangen die Schüler in erster Linie auf dem Wege über die Probe.", waren nicht die gesuchten Leitgedanken für eine wissenschaftlich einwandfrei zu behandelnde Gleichungslehre. (Vgl. dazu auch /119/)

Im Mathematikbeschluß /8/ wurde betont: "Die angemessene Schulung des mathematischen Denkens erweist sich als die Hauptschwäche im Mathematikunterricht. Darüber hinaus trägt der Inhalt des mathematischen Wissens und Könnens, das gegenwärtig den Schülern vermittelt wird, nicht genügend dem Entwicklungsstand der mathematischen Wissenschaften Rechnung." Diese Feststellung traf in besonderem Maße auf die Gleichungslehre zu.

Inzwischen waren die Neubearbeitungen der sowjetischen Lehrbücher /14/, /10/, /65/, /66/ und die schon genannten Veröffentlichungen erschienen. Die Mängel der bisherigen Stoffbehandlung waren bekannt, verschiedene Wege zur Neugestaltung auf der Grundlage von Mengenlehre und mathematischer Logik waren angedeutet. Es galt nun, durch eine klare Zielvorstellung und durchgängige Leitprinzipien ein Programm für den Lehrgang zu entwickeln.

1) Zielvorstellung für die 10. Klasse

Die Zielvorstellung für die 10. Klasse lautete in unserem Falle wie folgt:

Z (1) Der Schüler ist in der Lage, Mengen zu bilden und zu erkennen, Elemente gegebener Mengen anzugeben und zu erkennen und Differenz-, Produkt-, Durchschnitts- und Vereinigungsmengen zweier Mengen zu bilden.

Z (2) Der Schüler kann Werte von Termen mit Variablen angeben, indem er die Variablen durch Elemente aus ihren Grundmengen ersetzt. Er kann den Definitionsbereich von Termen bestimmen und hat Sicherheit in auszuführen äquivalenter Termumformungen.

Z (3) Der Schüler beherrscht die im Verlauf des Lehrganges vermittelten Begriffe, Definitionen und Sätze des Stoffgebietes. Er kann die Symbolik der Mengenlehre bei Gleichungen und Ungleichungen richtig anwenden.
Er beherrscht eine korrekte Fachterminologie.

Z (4) Der Schüler weiß, daß Erfüllbarkeit einer Gleichung (Ungleichung) und Äquivalenz zweier Gleichungen (Ungleichungen) von den gegebenen Variablengrundmengen bzw. der Lösungsgrundmenge abhängen.

Z (5) Der Schüler kennt die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Begriffen und Aussagen und kann entsprechende Aufgabenstellungen durch Einsatz der richtigen Definitionen und Sätze lösen.

Z (6) Der Schüler erkennt die Zugehörigkeit von Gleichungen zu gewissen Klassen (Typen).
Er kann Klassen (Typen) von Gleichungen durch Gleichungen mit Parametern (Formvariablen) darstellen.

Z (7) Der Schüler kann Gleichungen mit Klammern bzw. Bruchtermen, in deren Nenner die Gleichungsvariable auftritt, durch äquivalentes Umformen über einer geeignet gewählten Lösungsgrundmenge auf die Ausgangsform für die Umformungsregeln, Lösungsformeln und -verfahren bringen.

Z (8) Der Schüler kennt die in Betracht kommenden Umformungsregeln, Lösungsformeln und -verfahren und die Zusammenhänge zwischen ihnen. Er kann jeweils die richtigen auswählen und hat Sicherheit beim Lösen auch von komplizierteren Aufgaben, die auf eine lineare Gleichung mit einer Variablen, auf eine quadratische Gleichung mit einer Variablen oder auf ein System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen führen. Die Gleichungen enthalten gegebenenfalls auch Parameter (Formvariablen).

Z (9) Der Schüler kann bei verschiedenen möglichen Lösungswegen entscheiden, welcher Weg der rationellere ist. Er wertet seine Ergebnisse kritisch und sichert sie, wenn möglich, durch Proben ab.

Z(10) Der Schüler kann in natürlicher Sprache gegebene Sachverhalte angemessenem Schwierigkeitsgrad, die sich durch Gleichungen ausdrücken lassen, in die formalisierte Sprache der Mathematik übertragen und umgekehrt.

Z(11) Der Schüler kann seine Kenntnisse über Gleichungen und Ungleichungen bei der Lösung innermathematischer und praktischer Probleme angemessenen Schwierigkeitsgrades einsetzen.

Z(12) Der Schüler hat auch in diesem Stoffgebiet den Umgang mit Tabellenbüchern, Tabellen und Tabellen weiter geübt.

Diese Zielvorstellung soll etappenweise auf den Zielen für die einzelnen Klassenstufen zu erreichen.

2) Leitprinzipien für den Lehrgang

Für den gesamten Lehrgang wurden die folgenden Leitprinzipien aufgestellt. Ihre Aufgabe war es, den Lehrgang nach durchgängigen inhaltlichen und methodischen Gesichtspunkten zu

steuern. Sie gehen aus von den unter 2.1.2. genannten Hauptgesichtspunkten, die hier als L (1) und L (2) aufzunehmen wären, und der Zielvorstellung für die 10. Klasse.

L (3) Die verwendeten Begriffe, Aussagen und Methoden kehren in jeder höheren Klassenstufe an Hand jedes neuen Gleichungstyps auf höherem Niveau wieder. Der Schüler ist zu befähigen, die Zusammenhänge zu erkennen.

L (4) Über den gesamten Lehrgang hinweg sind gewisse mathematische Grundtätigkeiten zu entwickeln, und zwar ausgehend von den spezifischen Tätigkeiten des Stoffgebietes (Vgl. Kap. 3.1.4.).

L (5) Es ist grundsätzlich zuerst begriffliche Klarheit zu schaffen, ehe zu kalkülmäßigen Arbeiten übergegangen wird.

L (6) Es sind für den gesamten Lehrgang gültige Handlungsvorschriften zu entwickeln, in die alle Lösungsverfahren, -regeln und -formeln einmünden bzw. aus denen sie resultieren. Sie haben die Einsicht in die Zusammenhänge zwischen den Lösungsmethoden zu fördern.

L (7) Übersichten und Zusammenfassungen und Tabellen sind in vielfältiger Form in den Lehrgang einzubauen. Die Schüler sind zu befähigen, geeignete derartige Hilfsmittel selbst zu entwickeln.

L (8) Aufgabenfolgen zur Einführung neuen Stoffes und Übungskomplexe zur Festigung und Vertiefung sind auf der Grundlage der Strukturbilder (Vgl. Kap. 3.2.) mit klarer Zielstellung aufzustellen. Sie haben auch die Aufgabe, das Erkennen von Zusammenhängen zwischen den Begriffen und Aussagen zu fördern.

L (9) Die Leistungskontrollen bilden ein System, das den gesamten Lehrgang durchzieht. Spezielle Fehleranalysen für sämtliche schriftlichen Leistungskontrollen gewährleisten ein rechtzeitiges und gezieltes Eingreifen bei auftretenden Schwierigkeiten.

L (10) Die Symbolik der Mengenlehre wird im gesamten Lehrgang konsequent angewandt. Sie darf dabei keinesfalls zu einem leeren Formalismus werden.
Es ist besonderer Wert auf exakte fachspezifische Wortbildungen zu legen. Einer Uniformisierung der Sprache ist durch vielfältiges Umformulieren der Sachverhalte entgegenzuwirken.

L (11) Dem Übertragen von in natürlicher Sprache gegebenen mathematischen Sachverhalten in die Sprache der Mathematik und umgekehrt ist nicht nur im jeweiligen Abschnitt "Textaufgaben" besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

L (12) Durch ein gleichartiges methodisches Vorgehen bei jedem neuen Gleichungstyp ist den Schülern zu helfen, die einmal gewonnenen Erkenntnisse in zunehmendem Maße selbständig auf neue Gleichungstypen zu übertragen.

2.1.5. Der Plan des Lehrganges

In der Tabelle 3 wird der Plan des Lehrganges vorgelegt und den präzisierten Lehrplan /68/ bzw. /69/ und den neuen Lehrplänen /71/ und /72/ gegenübergestellt. Die Tabellen 4 bis 7 zeigen schematische Übersichten über den Gesamtlehrgang bzw. die Lehrgänge der einzelnen Klassenstufen.

2.1.6. Die Stoffverteilungspläne

In den Tabellen 8 bis 10 erscheinen die Stoffverteilungspläne des 2. Versuchs (1965/66 bis 1968/69). Sie unterscheiden sich von denen des 1. Versuches (1964/65 bis 1967/68) lediglich durch eine Vergrößerung der Stundenzahl für die 7. Klasse um 3 Stunden.

Die in der dritten Spalte "Methodische Hinweise" enthaltenen Abkürzungen beziehen sich auf die in Übersicht 1 (s. 2.2.1 und in Abschnitt 3. "Methodische Grundlagen" aufgeführten methodischen Hilfsmittel. Es bedeuten dabei:

A : Algorithmische Vorschrift
M : Merkmaterial für den Schüler
Ü : Übungsblatt
Str: Strukturbild

Die Kontrollarbeiten sind klassenstufenweise numeriert (7/I, 7/II, ...). Merkmaterial, Übungsblätter und Kontrollarbeiten befinden sich im Anhang.

Die "Methodischen Hinweise" enthalten in der angegebenen Form zum Teil erst im Verlauf bzw. im Ergebnis der unterrichtspraktischen Untersuchungen. Sie sollen eine bewußte und planmäßige Fähigkeitsentwicklung unterstützen.

2.1.7. Die Lehrmaterialien

In den Schuljahren 1963/64 (Ausarbeitung des Unterrichtsversuchs) und 1964/65 (1. Versuch 7. Klasse) gab noch das Lehrbuch "Rechnen, Messen, Konstruieren" /77/ für die 7. Klasse. Dieses Buch war aber für die Ausarbeitung noch für den Unterricht geeignet. Bezeichnungen wie "Unbekannte" und "Bestimmungsgleichung" oder Formulierungen wie

"Bei dieser Gleichung" - gemeint ist
x + 100 + 50 = 1000 + 500 - "handelt es sich um eine besondere Art. Sie wird nur dann zu einer Gleichung, wenn wir für x eine ganz bestimmte Zahl einsetzen." /97, S. 49/ hatten im Unterrichtsversuch nichts zu suchen. Es mußte also sowohl für den Lehrer (Versuchsleiter) als auch für den Schüler Material als Untersuchungsgrundlage ausgearbeitet werden. Da die Übungsaufgaben des Lehrbuches nur auf die Entwicklung formaler Rechentechniken abzielten, konnten auch sie das Anliegen der Untersuchungen, stärkere begriffliche Klarheit zu schaffen und die Entwicklung gewisser Fähigkeiten zu fördern, nicht unterstützen.
Etwas günstiger war die Lage zu Beginn des 2. Versuches 7. Klassen (1965/66) und des ersten Versuches 8. Klassen (1965/66). Zu dieser Zeit lagen die neuen Lehrbücher für die 7. und 8. Klassen /81/ und /82/ vor. Diese konnten in Verbindung mit dem Untersuchungsmaterial mit Anleitung durch den Lehrer benutzt werden. Sie waren allerdings für unsere Zwecke nicht konsequent genug. So war u. a. eine Definition des Begriffes "äquivalente Gleichungen" ohne eine explizite Forderung gleicher Grundmengen für unsere Zwecke unzureichend. Wir benötigten von Anfang an den Begriff "Lösungsmenge" und seine konsequente Verwendung. Der Satz über die Transitivität der Äquivalenz von Gleichungen fehlte und ebenso eine Festlegung über die Äquivalenz nicht erfüllbarer und allgemeingültiger Gleichungen. Dem Problem der Abhängigkeit der Existenz von Lösungen von der Lösungsgrundmenge wurde zu wenig Beachtung geschenkt. Das Lehrbuch 7. Klasse /81/ war auch inkonsequent bei der Verwendung des Begriffes "Ausdruck". Er erscheint einmal, z. B. bei der Definition des Begriffes "Gleichung" für die gesamte Zeichenreihe und an anderer Stelle, z. B. auf Seite 148 im Sinne von "Term". Die Nichtverwendung der Be-

griffe "Term" und "Aussageform" und der Verzicht auf die Mengenschreibweise erwiesen sich als weitere Mängel für unser Anliegen.
Besonders ungünstige Bedingungen bezüglich der Lehrbücher lagen in den 9. Klassen vor. Das alte, noch bis zum Schuljahr 1969/70 gültige Lehrbuch 9. Klasse /83/, war völlig ungeeignet, da dort noch mit Bezeichnungen wie "allgemeines Zahlsymbol", "Unbekannte", usw. gearbeitet wurde. Wegen der vorangehenden Lehrbücher /81/ und /82/ ist dieses Lehrbuch übrigens auch für Nicht-Versuchsklassen im Stoffgebiet Gleichungen außer für Übungsaufgaben ungeeignet. Im Unterrichtsversuch wurden lediglich einige Übungsaufgaben nach Ergänzung von Variablengrundbereichen verwendet.

Aus der dargelegten Situation heraus entstanden für die Unterrichtsversuche die folgenden Materialen, von denen auf einige schon in den Stoffverteilungsplänen verwiesen wurde:

1. Material für den Lehrer in Form einer knappen Stoffdarlegung verbunden mit methodischen Hinweisen, das für die 7. Klassen auch alle Stundenvorbereitungen enthielt,

2. Material für den Schüler in Form einer Zusammenstellung der wichtigsten Definitionen, Sätze und Regeln, "Merkmaterial" genannt und mit "M" bezeichnet,

3. Übungsblätter, mit "Ü" bezeichnet,

4. Material für die Wiederholung am Ende der 7. Klasse und

5. Ein System von Kontrollarbeiten.

Das Material zu 1. wird in gestraffter Form in dem folgenden Kapitel 2.2.dargelegt; die Materialien zu 2. bis 5. befinden sich im Anhang. Beigegeben sind dem Material zu 1.

Anmerkungen zu Fremdwörtern, Abkürzungen und sprachlichen Problemen.

Die in Kapitel 2.2. angegebenen Definitionen erscheinen so, wie sie im Unterrichtsverlauf verwendet wurden.

Eine kritische Stellungnahme zu Formulierungen usw. erfolgt gegebenenfalls in den Anmerkungen.

2.2. Darstellung des Lehrgangs "Gleichungen" für die Klassen 7 bis 10

2.2.1. Der Lehrgang 7. Klasse (Vgl. Tabelle 5 und Tabelle 8)

2.2.1.1. Vorgaben aus früheren Stoffgebieten

1) Die vier Grundrechenoperationen mit rationalen Zahlen (Vgl. /68, S. 69/); Grundgesetze der Arithmetik

2) Die Definition des absoluten Betrages

3) Lösen einfacher eingekleideter und Anwendungsaufgaben (Vgl. /68, S. 53 und S. 65/)

2.2.1.2. Vorarbeiten

1) Menge, Element einer Menge [M, S. 1]

Der Begriff "Menge" ist einer der wichtigsten Grundbegriffe der Mathematik. Die Allgemeine Mengenlehre wird heute als das Fundament der Mathematik angesehen [6]. Wir verstehen zunächst unter "Menge" eine Zusammenfassung oder Gesamtheit von Dingen, Personen usw. mit einer gemeinsamen Eigenschaft.

a) Unsere Sprache enthält für eine Reihe von Mengen spezielle Namen, z. B.: Klasse, Herde, Fußballmannschaft, Gruppenleitung usw.

b) Für andere Mengen gibt es keinen besonderen Namen:
Die Menge der Einwohner Leipzigs, die größer als 1,5 m sind

Die Menge der Nationalpreisträger der DDR, die in Leipzig wohnen

Die Menge der Mädchen der Klasse 7b usw.

c) Im bisherigen Mathematikunterricht sind verschiedentlich Mengen aufgetreten, ohne daß dafür der Begriff Menge verwendet wurde:

Die Menge der natürlichen Zahlen,
Die Menge der Primzahlen,
Die Menge der Teiler von 12,
Die Menge der rechtwinkligen Dreiecke usw.

Der Unterschied zwischen Menge und Anzahl ist klar herauszuarbeiten. Ebenso ist es wichtig, den mathematischen Begriff Menge genau abzugrenzen von Umgangssprachlichen "eine Menge" im Sinne von "viele".

Die Objekte, aus denen die Menge gebildet wird, heißen "Elemente der Menge". Diese Elemente können auch gedanklicher Art sein (z. B. in der Mathematik).
Nachdem die Schüler eine Vielzahl von Mengen und einzelne Elemente davon genannt haben, wird die im Material für die Schüler enthaltene Erklärung genau erläutert, besonders die Attribute "bestimmt" und "wohlunterschieden".

Erklärung: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten (Gegenständen, Personen, Zahlen usw.) zu einem Ganzen.
Die einzelnen Objekte werden Elemente der Menge genannt[7].

2) Angabe von Mengen

(a) Aufzählende Form: Alle zur Menge gehörenden Elemente werden durch Kommas getrennt, in eine geschweifte Klammer gesetzt. Mengen werden mit großen lateinischen Buchstaben und evtl. noch mit Indizes bezeichnet:

$A, B, C, \ldots, M_1, M_2, \ldots$

$A = \{Mo, Di, Mi, Do, Fr, Sd, So\}$[8]

$B = \{Asien, Afrika, Amerika, Europa, Australien, Antarktis\}$

Die Anzahl der Elemente einer Menge kann endlich oder unendlich sein. Bei unendlichen Mengen schreibt man drei Punkte, nachdem man einige Elemente angegeben hat und das Bildungsgesetz klar ist.

$$C = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$$
$$D = \{0,3,6,9,12,\ldots\}$$

(b) Beschreibende Form: Es wird eine charakteristische Eigenschaft, die allen Elementen der Menge zukommt, angegeben. Dabei ist zu beachten, daß etwa "schön", "dick" u. ä. keine charakteristischen Eigenschaften sein können, da durch sie nicht gewährleistet ist, daß für jedes Objekt genau entscheidbar ist, ob es zur Menge gehört oder nicht.

A = Menge der Tage einer Woche
B = Menge der Erdteile
C = Menge der natürlichen Zahlen
D = Menge der durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen

Diese Schreibweise ist vor allem im Falle unendlicher Mengen der unter(a) genannten überlegen.

Bemerkung: Nach der Erarbeitung der Begriffe "Aussageform" und "Variable" wird noch eine dritte Schreibweise von Mengen eingeführt. (Vgl. Kapitel 2.2.1.2.6))

3) Angabe von Elementen

Für "ist Element von" wird das Zeichen "$\in$", für "ist nicht Element von" das Zeichen "$\notin$" benutzt.

$Mo \in A$, $7 \notin D$, usw. U I

4) Eingliedmengen, die leere Menge

Definition: Eine Menge, die nur genau ein Element enthält, wird Eingliedmenge genannt[9].

M_1 = Menge der Klassenlehrer der Klasse 7b

M_1 = {Herr Voigt}

M_2 = Menge der Staatsratsvorsitzenden der DDR

M_2 = {Walter Ulbricht}

M_3 = Menge der geraden Primzahlen

M_3 = {2}

M_4 = Menge aller durch 3 teilbaren natürlichen Zahlen, die zwischen 5 und 7 liegen

M_4 = {6}

usw.

Definition: Die Menge, die kein Element enthält, wird leere Menge genannt. Wir bezeichnen sie mit { } [1b].

M_1 = Menge aller Schüler der 7b, die älter als 18 Jahre sind

M_1 = { }

M_2 = Menge aller ungeraden Zahlen, die durch 2 teilbar sind

M_2 = { }

M_3 = Menge aller Dreiecke, die zwei rechte Winkel haben

M_3 = { }

usw.

Ü II

5) Anwendung auf die Zahlbereiche [M, I, 1]

Für die Menge der natürlichen Zahlen, die Menge der ganzen Zahlen und die Menge der rationalen Zahlen werden besondere Bezeichnungen eingeführt [4].

a) N = Menge der natürlichen Zahlen

$N = \{0,1,2,3,4, \ldots\}$

$2 \in N,\ 0 \in N,\ -3 \notin N,\ \frac{1}{2} \notin N$

Graphische Darstellung am Zahlenstrahl:

b) G = Menge der ganzen Zahlen

$G = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

$-3 \in G,\ +5 \in G,\ \frac{1}{3} \notin G,\ 0 \in G$

Graphische Darstellung auf der Zahlengeraden:

c) Q = Menge der rationalen Zahlen

$Q = \{\ldots, -3{,}5\ , \ldots, -\frac{1}{2}\ , \ldots, -\frac{1}{4}\ , \ldots, 0, \ldots,$
$+0{,}3\ , \ldots, +4, \ldots\}$

$-0{,}5 \in Q,\ +\frac{3}{2} \in Q,\ 0 \in Q$

Graphische Darstellung auf der Zahlengeraden:

Überblick über die Zahlbereiche

Die Darstellung soll auch zu der [illegible] "Teilmenge" heranführen[12].

Aufgaben zur Angabe und graphischen Veranschaulichung von Teilmengen von N, G und Q:

a) Gib die Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner als 4 sind, an und veranschauliche sie graphisch!

b) Gib die Menge aller ganzen Zahlen, die zwischen -3 und +5 liegen, an und veranschauliche sie graphisch!

c) Veranschaulliche die Menge aller rationaler Zahlen, die größer als $+\frac{1}{2}$ sind, auf der Zahlengeraden!

usw.

Dies werden die Zeichen "$<$", "$>$" und "$\leqq$", "$\geqq$" eingeführt.

Für die jeweiligen Mengen ist die Angabe von Elementen zu üben.

Wiederholung der Grundgesetze der Arithmetik für die Menge der rationalen Zahlen an Hand des Lehrbuches 7. Klasse /61/ (Satz 18, Satz 19, Satz 24, Satz 25, Satz 26). Ferner sind die Begriffe "Vorgänger" und "Nachfolger" und "dicht-liegen" der rationalen Zahlen zu wiederholen (/61/, S. 29 und S. 30).

6) Gleichheit von Mengen [E, S. 2]

Definition: Zwei Mengen A und B sind gleich, wenn sie aus genau den gleichen Elementen bestehen A = B.[13]

(oder: ..., wenn sie sowohl die gleichen Elemente enthalten).

A = Menge der geraden Primzahlen

B = {2}

Es ist A = B

$M_1 = \{1,2,3,4,5\}$

$M_2 = \{5,3,4,2,1\}$

Es ist $M_1 = M_2$

M_3 = Menge aller gleichseitigen Dreiecke

M_4 = Menge aller Dreiecke, die drei gleiche Winkel haben

Es ist $M_3 = M_4$

usw.

[III

7) Aussage [M, S. 2]

a) Es ist über einen Mitschüler, über einen mathematischen Körper usw. etwas "auszusagen".

b) Die folgenden Fragen sind in einem Satz zu beantworten:

(1) Wie groß ist die Winkelsumme eines Dreiecks?

(2) Wie definiert man das Rechteck als Parallelogramm?

(3) Welches ist die kleinste natürliche Zahl?

usw.

c) Formuliere in einem Satz:

(1) $-\frac{1}{4} < -\frac{1}{8}$

(2) $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$

(3) $+7 > +6$

usw.

Erklärung: Unter einer Aussage verstehen wir einen sinnvollen Satz, dessen Inhalt entweder wahr (w) oder falsch (f) ist.[14]

Nennt wahre und falsche Aussagen aus dem täglichen Leben, aus der Mathematik!
Mathematische Aussagen schreiben wir mit unter Verwendung mathematischer Symbole:

$4 \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$; $15 < 20$; $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$; $-4 > -8$; $7 \neq \frac{21}{3}$, usw.

Gleichheits- und Ungleichheitsaussagen

Tritt in einer mathematischen Aussage das Zeichen " = " auf, so spricht man von einer Gleichheitsaussage [19], tritt eines der Zeichen " > ", " < ", " ≠ " auf, so spricht man von einer Ungleichheitsaussage.

Für die Zeichen " = ", " > ", " < ", " ≠ " hat der Oberbegriff "Relationszeichen" Verwendung.

Aufgaben folgender Art:

a) Nenne wahre Gleichheitsaussagen! Nenne falsche Gleichheitsaussagen! Nenne wahre Ungleichheitsaussagen! Nenne falsche Ungleichheitsaussagen!

b) Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind:

$12 - 6 + 3 - 3 = 8$

$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \neq -1$

$\frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{6}$

$\left(-\frac{4}{5}\right)^3 = -\frac{12}{5}$

$-\frac{1}{2} < -\frac{2}{3}$

usw.

c) Setze in das Kästchen das richtige Ordnungszeichen, so daß wahre Aussagen entstehen!

$5\frac{1}{5} \;\square\; \frac{26}{5}$

$-\frac{7}{2} \;\square\; -\frac{7}{4}$

$\frac{12}{2} \;\square\; \frac{18}{3}$

$-4\frac{1}{3} \;\square\; -4{,}25$

usw.

Kontrollarbeit 7/1

Ü IV

e) Ausgangsniveau S. 3. 2

Der Begriff Variable wird wiederholt:

<u>Variablen</u> sind Zeichen (Buchstaben, geometrische Symbole usw.) für Elemente aus einer vorgegebenen Variablengrundmenge. Diese wird im folgenden meist kurz Grundmenge genannt. Man verwendet statt Variable auch die Begriffe "Leerstelle" und "Platzhalter" (im Englischen placeholder). Hier soll vorwiegend der Begriff "Variable" gebraucht werden.[16]

<u>Aufgaben:</u> Ersetze die Variablen so, daß wahre Aussagen entstehen![17]

a) <u>Er</u> ist Gruppenratsvorsitzender.

b) <u>Sie</u> trägt eine Brille.

c) $\square \in N$

d) ....+18 = −2

e) 12 + (− 8) = $\triangle$

f) a + b = 6

g) x −2 = −5

usw.

Diese Aufgaben sind keine Aussagen. Sie dienen erst zu zeigen, wenn man die Variablen durch Elemente aus gegebenen Grundmengen ersetzt. - Man hat es hier mit sogenannten Aussageformen zu tun. - Für die Aufgaben sind nochmals solche geeigneten Grundmengen anzugeben.

Definition: Unter einer Aussageform verstehen wir einen Satz, der mindestens eine Variable enthält.[18]
Ersetzt man in einer Aussageform die Variable(n) durch Elemente aus der (den) gegebenen Grundmenge(n), so entsteht entweder eine wahre oder eine falsche Aussage.

Aufgaben folgender Art:

Aussageform Grundmenge G	Aussage	w oder f	Probe
$3 \cdot x = -\frac{3}{5}$	$3 \cdot (-\frac{1}{5}) = -\frac{3}{5}$	w	$-\frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$
	$3 \cdot (+\frac{1}{5}) = -\frac{3}{5}$	f	$+\frac{3}{5} = -\frac{3}{5}$
	$3 \cdot (-\frac{3}{15}) = -\frac{3}{5}$	w	$-\frac{9}{15} = -\frac{3}{5}$
usw.			

Probe: Wir nehmen auf beiden Seiten der Gleichheitszeichen solange auf Grund bekannter Rechenregeln Umformungen vor, bis wir erkennen, ob eine wahre oder eine falsche Aussage vorliegt.

Weitere Aufgaben (Variation der Grundmenge):

Aussageform	Grundmenge	wahre Aussagen
$x < 3$	N	$0<3;\ 1<3;\ 2<3$
	G	$\ldots;\ -2<3;\ -1<3;\ 0<3;\ 1<3;$ $2<3$
$a + 4 = 2$	N	es gibt keine
	G	$-2 + 4 = 2$
$5y = 4y$	Q	$5 \cdot 0 = 4 \cdot 0$
	{Primzahlen}	es gibt keine
usw.		

Es wird an dieser Stelle eine dritte Schreibweise [illegible] (o) eingeführt; nämlich mittels des [illegible] Mengenzeichens. Besonders wichtig ist dabei eine gründliche Übung im Lesen und [illegible] im richtigen Niederschreiben des in Worten gegebenen Sachverhaltes.

(1) A = Menge aller Teiler von 8   bekannte Schreibweisen

$A = \{1, 2, 4, 8\}$

$A = \{x/x$ ist Teiler von $8\}$ ⟶ neue Schreibweise

gelesen: " ... die Menge aller x, für die gilt... "

Hinter dem schrägen Strich erscheint hier eine Aussageform. Es können aber auch andere (auch "und" verbundene) Aussageformen auftreten.

(2) B = Menge aller Primzahlen, die zwischen 2 und 10 liegen

B = {3,5,7}

B = {a / a ist Primzahl und 2 < a < 10}

Nenne die bei (1) und (2) verwendeten Grundmengen! Beachte, daß bei (1) die Grundmenge mit im Wort Teiler steckt!

Gib für die folgenden Mengen jeweils die beiden anderen Schreibweisen an:

(3) C = {y / y ist ein Buchstabe des Wortes MISSISSIPPI}

(4) D = {b / b ist eine natürliche Zahl kleiner als 1}

(5) E = {x / x ∈ G und −2 < x < +4}

(6) F = {y / y ∈ Q und y+1 = y+2}

usw.

[illegible]

[illegible]

Zu [illegible]

Es wird durch Aufzählung angegeben, was Terme sind, und betont, daß diese Aufzählung fortgesetzt wird.[19]

(1) Alle Zahlzeichen sind Terme: 4, −3, $\frac{1}{2}$, −2,73 ,...

(2) Alle Variablen sind Terme: a, b, ..., x, y, ..., □, △, ...

(3) Alle Verknüpfungen von Zahlzeichen und Variablen durch die vier Grundrechenoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) sind Terme: 3x, 4a − 3b, $\frac{n}{2}$, 3y + $\frac{x}{z}$, ...

Ausgenommen ist die Division durch Null.

(4) Alle Verknüpfungen von Termen durch die vier Grundrechenoperationen sind Terme: Wenn zum Beispiel

$T_1 = 3x + 4$ und $T_2 = \frac{4}{5} y$, dann ist auch

$T_3 = T_1 + \frac{1}{2} T_2 = 3x + 4 + \frac{4}{5} y$ ein Term.

Diese Aufzählung kann im weiteren Verlauf des Mathematikunterrichtes fortgesetzt.

Aufgaben:

a) Gib Terme an!

b) Bilde aus $T_1 = \frac{x}{2}$ und $T_2 = x + 4$ weitere Terme!

c) Ersetze in den folgenden Termen die Variablen nacheinander durch die in der ersten Spalte angegebenen Zahlen und gib die Werte der Terme an:

	$\frac{7}{2}\,a$	$x - 5$	$1 : x$	usw.
-2				
-1				
0				
$+1$				
2	7	-3	$\frac{1}{2}$	
3				
$1\frac{1}{2}$				
usw.				

Normalisierung: Der Term $1 : x$ ist für die Zahl Null "nicht definiert". (Es ist der Begriff Definitionsbereich einzuführen, der in der 3. Klasse ausgeführt wird, vorzubereiten)

oder " $>$ ". So entstehen wahre und falsche Aussagen,

z. B.: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} < \frac{3}{4}$ (f), usw.

b) Gegeben sind die Terme 2a und 10.
Verbinde auch sie durch eines der Zeichen "$=$", "$<$" oder "$>$". Es entstehen Aussageformen, z. B.:
$2a = 10$, $2a < 10$, usw.

Definition: (1) Verbindet man zwei Terme T_1 und T_2 durch das Gleichheitszeichen, so entsteht eine

GLEICHUNG: $T_1 = T_2$ 29)

(2) Verbindet man zwei Terme T_1 und T_2 durch eines der Zeichen "$<$", "$>$", "$\neq$", so entsteht eine

UNGLEICHUNG: $T_1 < T_2$, $T_1 > T_2$, $T_1 \neq T_2$

In folgenden werden nur Ungleichungen der Form $T_1 < T_2$ und $T_1 > T_2$ verwendet.

Die Terme, die links und rechts vom Relationszeichen stehen, nennt man auch "linke Seite" und "rechte Seite" der Gleichung bzw. Ungleichung.
Nach der angegebenen Definition gehören die Gleichheitsaussagen zu den Gleichungen und die Ungleichheitsaussagen zu den Ungleichungen.

Ü B E R S I C H T

Gleichungen
Ungleichungen

ohne Variablen	mit Variablen
Gleichheitsaussagen z.B.: $\frac{14}{2} = 7$, $-5 = -1-6$	Gleichheitsaussageformen z.B.: $3x = 12$, $a+b = 4$
Ungleichheitsaussagen z.B.: $\frac{1}{2} < \frac{3}{4}$, $-1,5 > 1,5$	Ungleichheitsaussageformen z.B.: $a + 4 < 12$, $2x > 8$

Nachdem die Schüler diese Übersicht erarbeitet haben, wird die weitere Zielstellung gegeben:

Im folgenden interessieren besonders die Aussageformen unter den Gleichungen und Ungleichungen, also die Gleichungen und Ungleichungen mit Variablen. Sie werden im weiteren meist kurz "Gleichungen" bzw. "Ungleichungen" genannt.

Aufgabe: In den folgenden Aufgabenstellungen sind zunächst die Gleichungen bzw. Ungleichungen und dann andersfarbig die Grundmengen zu unterstreichen:

$A = \{a \mid a \in \mathbb{N} \text{ und } a + 3 = 5\}$
$B = \{b \mid b \in \mathbb{N} \text{ und } b < 4\}$
$C = \{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ und } 5x = 26\}$
$D = \{y \mid y \in \mathbb{N} \text{ und } 5y = 26\}$

2) Lösung, Lösungsgrundmenge, Lösungsmenge N, S 4

Aufgabe: Die obigen Aussagen sind in aufzählender Form anzugeben! Das bedeutet, daß alle Zahlen aus der gegebenen Grundmenge gesucht sind, die diese Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen, das heißt, die Einsetzung in diesen Aussagen führen.

Definition: Die Grundmenge, aus der die Lösungen zu suchen sind, nennen wir Lösungsgrundmenge Lg.

Definition: Jede Zahl aus der Lösungsgrundmenge, die die Gleichung (Ungleichung) erfüllt, heißt Lösung der Gleichung (Ungleichung).

Definition: Die Menge aller Lösungen einer Gleichung (Ungleichung) heißt Lösungsmenge L.

Definition: Eine Gleichung (Ungleichung) lösen heißt, ihre Lösungsmenge bestimmen.

Die in A, B, C, D verwendeten Gleichungen bzw. Ungleichungen haben gemeinsam in aufzählender Form die folgenden Lösungsmengen:

$A = \{2\}$; denn: $2 + 3 = 5$ (w) und $2 \in \mathbb{N}$ (w)

$B = \{0, 1, 2, 3\}$; denn: $0 < 4$ (w) und $0 \in \mathbb{N}$ (w)
$1 < 4$ (w) und $1 \in \mathbb{N}$ (w)
$2 < 4$ (w) und $2 \in \mathbb{N}$ (w)
$3 < 4$ (w) und $3 \in \mathbb{N}$ (w)

$C = \left\{\frac{26}{5}\right\}$; denn: $5 \cdot \frac{26}{5} = 26$ (w) und $\frac{26}{5} \in \mathbb{N}$ (f)

$D = \{\}$; denn: $5 \cdot \frac{26}{5} = 26$ (w) und $\frac{26}{5} \in \mathbb{N}$ (f)

Hinweise:

- Es ist klarzustellen, daß es sich bei A, B, C, D in der zuerst gegebenen Form auch um die Lösungsmengen handelt, diese aber in aufzählender Form gesucht sind.
- Im folgenden werden Lösungsmengen im allgemeinen mit L, L_1, L_2, ... bezeichnet.
- Der richtige Umgang mit den Begriffen ist an Hand vielfältiger Aufgabenstellungen zu üben.
- Enthält eine Lösungsmenge mehr als drei Elemente, so ist die Probe nur für einige Beispiele (zwei oder drei) auszuführen. Es ist darauf hinzuweisen, daß es Möglichkeiten gibt, auch bei unendlich vielen Elementen die Probe vollständig auszuführen, das aber hier noch nicht gezeigt werden kann.
- Die Probe besteht im folgenden grundsätzlich aus zwei Teilen, in denen zwei Bedingungen zu überprüfen sind, nämlich (1) die Gültigkeit einer Gleichheits- bzw. Ungleichheitsaussage und (2) die Wahrheit einer Aussage über das Enthaltensein der Lösungen nach (1) in Frage kommenden Elemente in der Lösungsgrundmenge.[21]

Aufgaben: Es sind [illegible] Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen, [illegible] nicht nur [illegible] sondern auch solche mit Absolut[illegible] zu verwenden, die durch inhaltliche Überlegungen zu lösen sind. Besonderer Wert ist auf das Bewußtmachen der Abhängigkeit der Lösungsmenge von der Lösungsgrundmenge zu legen.

a) $\{x \,/\, x \in G$ und $x + 5 = 2\}$

b) $\{y \,/\, y \in N$ und $y + 5 = 2\}$

c) $\{z \,/\, z \in Q$ und $-\frac{1}{3}z = 1\}$

d) $\{b \,/\, b$ ist positive gerade Zahl und $b < 11\}$

e) $\{c \,/\, c$ ist Primzahl und $15 < c < 17\}$

f) $\{d \,/\, d \in G$ und $/d/ = 5\}$

g) $\{e \,/\, e \in N$ und $/e/ = 5\}$

h) $\{g \,/\, g \in G$ und $g^2 = 25\}$

i) $\{f \,/\, f \in G$ und $3f + 1 = 2f + 1\}$

j) $\{z \,/\, z \in G$ und [illegible] $>$ [illegible]$\}$

k) $\{a \,/\, a \in G$ und $a^3 = 125\}$

l) $\{a \,/\, a \in G$ und $a^2 = 25\}$

m) $\{y \,/\, y \in Q$ und $y + 1 = y\}$

n) $\{u \,/\, u \in Q$ und $u + 1 = u + 1\}$

o) $\{v \,/\, v \in G$ und $2v > -1\}$

p) $\{r \,/\, r \in Q$ und $3r - 1 = 0\}$

usw. | Ü II |

Hinweis:
Es empfiehlt sich, [illegible] in der [illegible] dargestellten Schema zu [illegible], in dessen letzter Spalte später noch "erfüllbar [illegible] nicht allgemeingültig" oder "nicht erfüllbar" oder "allgemeingültig" eingetragen werden sollte. Auf diese [illegible] sich alle Begriffe an Hand verschiedener Aufgaben [illegible] [illegible].

| Kontrollarbeit 7/III |

1) erfüllbare, nicht erfüllbare und allgemeingültige Gleichungen und Ungleichungen [E I 4]

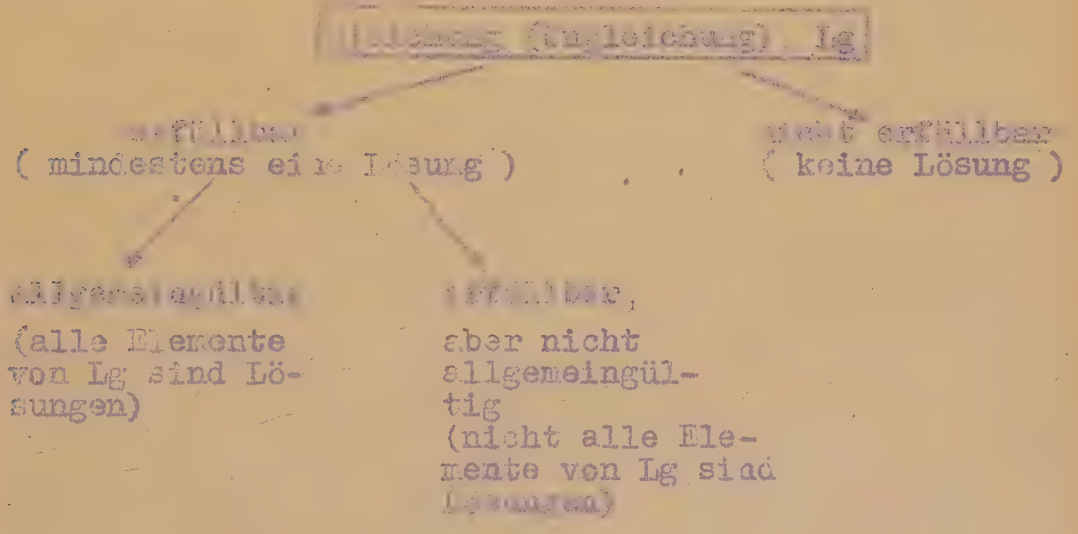
Die folgenden Begriffe werden an Hand der Aufgaben des Lehrgangs (Vgl. S. [illegible] 1) erklärt; die Schüler haben selbst weitere Beispiele [illegible] in einzelnen Fällen zu suchen.

Definition: Eine Gleichung (Ungleichung) heißt erfüllbar über einer Lösungsgrundmenge, wenn es in dieser Lösungsgrundmenge mindestens eine Lösung gibt.

Definition: Eine erfüllbare Gleichung heißt allgemeingültig über einer Lösungsgrundmenge, wenn jedes Element der Lösungsgrundmenge Lösung ist. [22]

Definition: Eine Gleichung heißt nicht erfüllbar über einer Lösungsgrundmenge, wenn kein Element der Lösungsgrundmenge Lösung ist.

Übersicht: [A I]



Aufgaben: In [illegible] vielfältige Übungsaufgaben unter Verwendung [illegible] zu stellen. Dabei sind auch schon einfache Aufgaben [illegible] vorzunehmen, um dann die Schüler Gleichungen bzw. Ungleichungen selbst gestalten finden sollen.

[Ü X] [Ü XI] [Str IIa] [Str IIb]

4) Äquivalente Gleichungen und Ungleichungen: [M. S. 5]

Die Aufgaben des Übungsblattes Ü XI und entsprechende Aufgaben dienen zur Einführung.

Definition: Zwei Gleichungen (Ungleichungen) heißen äquivalent, wenn sie gleiche Lösungsgrundmengen und gleiche Lösungsmengen haben. 3)

Vorschrift: [A II]

1. Bedingung: Sind die Lösungsgrundmengen gleich?

- ja →
  2. Bedingung: Sind die Lösungsmengen gleich?
  - ja → Die Gleichungen sind äquivalent
  - nein → Die Gleichungen sind nicht äquivalent
- nein → Die Gleichungen sind nicht äquivalent

Mit dieser Vorschrift sollen sich die Schüler gemäß ihrem individuellen [illegible] des Sachverhaltes lösen. Es ist auch die Sprechweise "Die Gleichungen (Ungleichungen) sind äquivalent über ...." einzuführen.

Aufgaben: Es geht vor allem darum, die Zusammenhänge bewußt zu machen. [Str III]

a) Nenne zur Gleichung 4 + x = 7 über P äquivalente Gleichungen!

b) $\{a \,/\, a \in G \text{ und } /a/ = 2\}$
$\{b \,/\, b \in G \text{ und } b = 2\}$

Sind die in den Aufgaben enthaltenen Gleichungen untereinander äquivalent oder nicht?
Wenn nicht, gib eine Lösungsgrundmenge an, über der sie äquivalent sind!

c) Sind die in den folgenden drei Aufgaben enthaltenen Gleichungen äquivalent oder nicht?

$\{x \mid x \in G \text{ und } \frac{4}{3}x = \frac{20}{3}\}$

$\{y \mid y \in N \text{ und } y = 5\}$

$\{a \mid a \in Q \text{ und } 2a = 10\}$

A XII, B XXIX

9. Lernarbeit 7/IV

<u>Satz:</u> Sind zwei Gleichungen einer dritten äquivalent, so sind sie auch untereinander äquivalent.

<u>Schema:</u>

Das Verständnis dieses Satzes wird für die Erarbeitung der Umformungsregeln benötigt.
Für nicht erfüllbare und für allgemeingültige Gleichungen (Ungleichungen) wird festgelegt:

(1) Nicht erfüllbare Gleichungen (Ungleichungen) sind bei gleichen Lösungsgrundmengen äquivalent.

z.B.: $\{a \mid a \in N \text{ und } 3a = -15\}$; $L_1 = \{\}$

$\{b \mid b \in N \text{ und } b + 1 = b\}$; $L_2 = \{\}$

Die Gleichungen $3a = -15$ und $b + 1 = b$ sind über N äquivalent.

(2) Allgemeingültige Gleichungen (Identitäten) sind bei gleichen Lösungsgrundmengen äquivalent.

z.B.: $\{x \mid x \in G \text{ und } 2x = 3x - x\}$; $L_1 = G$

$\{y \mid y \in G \text{ und } y + 4 = 4 + y\}$; $L_2 = G$

Die Gleichungen $2x = 3x - x$ und $y + 4 = 4 + y$ sind über G äquivalent.

2.1.1.4. Äquivalente Umformungen für Gleichungen ersten Grades mit einer Variablen

1) Zielstellung, Begriff:

Das "probieren" beim Auffinden aller Lösungen einer Gleichung (Ungleichung) ist unbefriedigend. Es ist daher Ziel des Unterrichts, die Möglichkeit auf dem Wege über eine Reihe äquivalenter Gleichungen (Ungleichungen) schließlich auf eine so einfache Gleichung (Ungleichung) führen, daß man die Lösungen sofort ablesen kann. - Es ist nicht für alle Arten von Gleichungen (Ungleichungen) möglich, solche Regeln anzugeben. -

Für den einfachsten Fall, nämlich für <u>reine lineare Gleichung mit einer Variablen</u>, werden derartige Regeln im folgenden erarbeitet.

a) Gegeben Gleichungen mit Variablen! Suche aus diesen solche ersten Grades mit einer Variablen aus!

b) Der Lehrer gegen Aufgabenstellungen aus der Praxis, die sich mittels einer Gleichung mit einer Variablen lösen lassen.

[illegible] Eine Umformung, die eine Gleichung in eine [illegible], nennt man Äquivalente Umformung.

Invariante solcher Umformungen sind die bekannten Grundgesetze der Arithmetik für die Menge der rationalen Zahlen. Diese Menge, Q, wird auch für alle folgenden Überlegungen als Grundmenge gewählt, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird.

Zielstellung: Die gegebene Gleichung zweiten Grades mit einer Variablen ist schrittweise so äquivalent umzuformen, daß man zu immer einfacheren Gleichungen kommt und schließlich zu einer letzten Gleichung, deren Lösungen sofort ablesbar sind.
Es sind Regeln (Sätze) gesucht, auf deren Grundlage man solche äquivalenten Umformungen ausführen kann.[24]

2) [illegible] Äquivalente Umformung von Gleichungen mit Variablen [M, S. 6 und S. 7]

1. Satz: Vertauscht man in einer Gleichung mit Variablen $T_1 = T_2$ die Seiten, so ist die neue Gleichung $T_2 = T_1$ zur ursprünglichen äquivalent.

$$\boxed{T_1 = T_2 \text{ äquivalent } T_2 = T_1}$$

Der Beweisgedanke wird an Beispielen dargelegt:

- Vertauschen der Seiten bei einer wahren Gleichheitsaussage führt wieder zu einer wahren Gleichheitsaussage.
- Für jede Lösung erreicht durch Einsetzen eine wahre Aussage.

[illegible]

[illegible] Falls man in einer Gleichung die Variablen auf [illegible] auf beiden Seiten auf der rechten Seite der Gleichung die Glieder ohne und die mit Variablen zusammen, so entsteht eine zur Ausgangsgleichung äquivalente Gleichung.[25)]

Es wird an Hand von Beispielen gearbeitet etwa so:

[illegible] gegeben:

$$4x + 3 - x + 5 = 15 - 6x + 7x - 3 \qquad L_1 = \{2\}$$

$$T_1 = T_2$$

[illegible] wird die Probe gemacht und die Richtigkeit der angegebenen Lösung bestätigt.

Durch Anwendung des Kommutativgesetzes der Addition und Zusammenfassen [illegible] eine zweite Gleichung:

$$4x - x + 3 + 5 = -6x + 7x + 15 - 3$$

$$3x + 8 = x + 12$$

$$T_1' = T_2'$$

Die Vermutung, daß auch $L_2 = \{2\}$, wird durch die Probe bestätigt. -- Es liegt hier Äquivalenz vor.

An einem [illegible]beispiel wird gezeigt, daß bei Ersetzen des Terms T_1 durch den Term T_2 bzw. des Terms T_2 durch den Term T_1 über [illegible] allgemeingültige Gleichungen [illegible] mit dem Begriff 'äquivalente Terme' wird nicht gearbeitet.

J XIV, U XV

[illegible]

b) $\frac{1}{2}a - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}a - \frac{3}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}a - \frac{1}{2}$; $L_1 = \{2\}$

c) $7i + 3u - 6 + 5u + 7 = 18 - 2u - 17 + 17u$; $L_1 = Q$

d) $4a - 7 + 4a + 3 - 8a = -12a + 26 - 4a - 14$; $L_1 = \{1\}$

e) $47x + 4 - 12x = 18x + 10 + 17x - 11$; $L_1 = \{\}$

Hinweise:

Da noch keine weiteren Regeln vorliegen, kommt es hier an auf:

- richtiges Zusammenfassen,
- Üben der Probe durch Einsetzen,
- [illegible] die zweite Gleichung zur ersten äquivalent ist, wenn sie die gleiche Lösungsmenge hat.
- [illegible] Gleichungstyp, [illegible] den von Regel 1 erhält:

Typ der Gleichung: $\triangle x + \square = \bigcirc x + \nabla$

oder $ax + b = cx + d$; $a, b, c, d \in Q$

[illegible] Variablen (geometrische Symbole bzw. die Buchstaben a, b, c, d) bei [illegible] gegebenen [illegible] sein können. 20)

Als Übung sind vom Schüler spezielle Gleichungen dieses Typs zu nennen.

[Str Ib]

[illegible] Addiert (subtrahiert) man bei einer Gleichung [illegible] $T_1 = T_2$ auf beiden Seiten denselben Term T_3, so erhält man eine zur Ausgangsgleichung äquivalente Gleichung:

$$T_1 + T_3 = T_2 + T_3$$

$$(T_1 - T_3 = T_2 - T_3)$$ 37)

$$\boxed{T_1 = T_2 \text{ äquivalent } T_1 \pm T_3 = T_2 \pm T_3}$$

Anschließend wird der Lösungsbegriff und entsprechender Satz für Aussagen der Beweisgedanke entwickelt.

Bei der Lösung ist es wichtig, die Aufgabenfolgen so anzulegen, daß die Schüler selbständig zur Regel gelangen, z. B.:

1. Gleichung: $x + 4 = 6$; die Schüler haben durch Probieren die Lösungsmenge zu finden:
$L_1 = \{2\}$.

2. werden eine Folge weiterer Gleichungen gegeben:

2. Gleichung: $x + 4 + 10 = 6 + 10$

3. Gleichung: $x + 4 + 2x = 6 + 2x$

4. Gleichung: $x + 4 - 5x = 6 - 5x$

usw.

Es ist zu untersuchen, ob es sich um äquivalente Gleichungen handelt. Der Schüler hat selbst weitere äquivalente Gleichungen zu nennen und die Regel zu finden. Dann wird der Beweisgedanke entwickelt.

Jetzt wird nur noch <u>rein</u> orientiert: Es ist so zu addieren bzw. zu subtrahieren, daß die neue Gleichung möglichst einfach wird, das heißt, es ist x bzw. das Glied mit x "<u>zu isolieren</u>".

$$x + 4 = 6 \quad | -4$$
$$L_1 = T_2$$

$$x + 4 \underline{\ -4} = 6 \underline{\ -4}$$
$$L_1 = T_2$$

$$x = 2$$
$$\underline{L = \{2\}}$$

Aufgaben

[illegible] zu bilden, die alle möglichen Fälle von T_3 erfassen:

T_3 ist eine rationale Zahl,

T_3 ist ein Produkt ax; $a \in Q$, $a \neq 0$

T_3 ist eine Summe $ax + b$; $a, b \in Q$, $a \neq 0$, $b \neq 0$

Ü XVI

c) [illegible] folgende Form zu [illegible]:

$$\{x \,/\, x \in Q \text{ und } 8x - 2 = 7x - 14\}$$

$$8x - 2 = 7x - 14 \quad / \quad -7x + 2$$

$$8x - 2 \underbrace{- 7x + 2} = 7x - 14 \underbrace{- 7x + 2}$$

$$x = -12$$

$\{x \,/\, x \in Q \text{ und } x = -12\}$ Diese Zeile wird später eingespart.

Lösung der letzten Gleichung ist −12.

Probe (1) $8 \cdot (-12) - 2 = 7 \cdot (-12) - 14$

$$96 - 2 = -84 - 14$$

$$-98 = -98 \quad (w)$$

(2) $-12 \in Q$ (w)

Die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung ist $L = \{-12\}$

[illegible]

sungsgrundmenge beinhalten, z. B.:

$$\{a \mid a \in \mathbb{N} \text{ und } 3a + 2 = 2a - 5\}$$

$$3a + 2 = 2a - 5 \quad / \; -2a - 2$$

$$3a + 2 - 2a - 2 = 2a - 5 - 2a - 2$$

$$a = -7$$

Die letzte Gleichung hat die Lösung -7.

Probe: (1) $3 \cdot (-7) + 2 = 2 \cdot (-7) - 5$

$$-21 + 2 = -14 - 5$$

$$-19 = -19 \quad (w)$$

(2) $-7 \in \mathbb{N}$ (w)

und L = { }

dritte Regel notwendig ist, z. B.:

$$\{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ und } 8x - 2 = 5x - 14\}$$

$$\{y \mid y \in \mathbb{Q} \text{ und } \tfrac{4}{5}y + \tfrac{1}{5} = \tfrac{2}{3}y - \tfrac{4}{1}\}$$

usw.

XVII
XVIII

... behandeln, die auf die Lösbarkeitsfälle hinarbeiten:

(a) $\{x \mid x \in Q \text{ und } 4x - 2 = 4x + 6\}$

$$4x - 2 = 4x + 6 \quad / \; -4x + 2$$
$$4x - 4x - 2 = 4x + 6 - 4x + 2$$
$$0 \cdot x = 8$$

... gibt keine rationale Zahl, die diese Gleichung erfüllt.

Probe: Ein Produkt, dessen einer Faktor Null ist, kann niemals den Wert 8 annehmen.

Die Lösungsmenge ist $L = \{\}$

(b) $\{a \mid a \in Q \text{ und } 7a + 3 = 7a + 3\}$

$$7a + 3 = 7a + 3 \quad / \; -7a - 3$$
$$0 \cdot x = 0$$

Diese Gleichung wird von jeder rationalen Zahl erfüllt.

... jede rationale Zahl mit Null erfüllt ...

Die Lösungsmenge ist $L = Q$

... der Gleichung: $\diamond \cdot x = \square$
oder $a \cdot x = b \quad , a, b \in Q$

... spezielle Gleichungen dieses Typs zu behandeln.

Stx Ib
U XIX

Für den Fall $a \neq 0$, $a \neq 1$ ist eine weitere Regel nötig.

<u>4. Folg.:</u> Multipliziert (dividiert) man bei einer Gleichung
<u>Regel 3</u> mit Variablen $T_1 = T_2$ beide Seiten mit demselben (durch denselben) Term $T_3 \neq 0$, so erhält man eine zur Ausgangsgleichung äquivalente Gleichung:

$$T_1 \cdot T_3 = T_2 \cdot T_3$$

$$(T_1 : T_3 = T_2 : T_3) \quad (10)$$

$T_1 = T_2$ äquivalent $T_1 \cdot T_3 = T_2 \cdot T_3$		$T_3 \neq 0$
$T_1 = T_2$ äquivalent $T_1 : T_3 = T_2 : T_3$		

Die Erarbeitung der Regel 3 erfolgt entsprechend der Erarbeitung von Regel 2. Der Beweisgedanke wird wieder ausgehend vom entsprechenden Satz für Aussagen entwickelt. Die Bedingung $T_3 \neq 0$ wird durch Beispiele erläutert. – Es kommt hierbei darauf an, daß man zum Satz gelangt unabhängig vom Ziel, das dann beim Lösen von Gleichungen verfolgt wird.

[illegible] am <u>Ziel</u> orientiert: bei Gleichungen vom Typ $ax = b$, $a \neq 0$, $a \neq 1$ ist so zu multiplizieren bzw. zu dividieren, daß der <u>Koeffizient</u> von x den Wert 1 annimmt, daß also x isoliert wird.

Es ergibt sich eine <u>Gleichung vom Typ</u> $x = [illegible]$ oder $x = a$, welche für [illegible] genau eine Lösung a hat. Str [illegible]

Damit liegt der Lösungsweg für jede Gleichung 1. Grades mit einer Variablen vor.

ÜXX

<u>Aufgaben:</u>

[illegible] sind vielfältige Aufgaben zu behandeln, bei denen auch [illegible] Augenmerk auf die Abhängigkeit der Existenz und [illegible] der Lösungen von der Lösungsgrundmenge. Beson-

[illegible] die Wiederholung der Begriffe und der Zusammenhänge zwischen ihnen.

3) Vorschrift für das Lösen einer linearen Gleichung mit einer Variablen. [illegible]

Gegeben: Gleichung: $3x + 20 - 6x + 8x = 36 + 2x - 1$

Lösungsgrundmenge: $x \in Q$

Gesucht: $\{x \,/\, x \in Q \text{ und } 3x + 20 - 6x + 8x = 36 + 2x - 1\}$

Lösungsweg: $3x + 20 - 6x + 8x = 36 + 2x - 1$

REGEL 1 (Zusammenfassen) $5x + 20 = 2x + 35 \quad / -2x - 20$

REGEL 2 (Addieren bzw. Subtrahieren) $5x + 20 - 2x - 20 = 2x + 35 - 2x - 20$

REGEL 1 (Zusammenfassen) $3x = 15 \quad / :3$

REGEL 3 (Multiplizieren bzw. dividieren) $\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$

Letzte Gleichung (aus der Kette äquivalenter Gln.) $x = 5$

Lösungen der letzten Gleichung: Die Zahl 5 ist die einzige Lösung.

Probe an Hand der Ausgangsgleichung:

(1) $3 \cdot 5 + 20 - 6 \cdot 5 + 8 \cdot 5 = 36 + 2 \cdot 5 - 1$

$45 = 45$ (w)

(2) [illegible]

[illegible] der Ausgangsgleichung: $L = \{5\}$

Hinweis: Der erläuternde Text wird in der Form vom Schüler allein niedergeschrieben. Die Reihenfolge der Lösungsschritte und die folgende Form sollten eingehalten werden.

Aufgaben:

a) Gegeben: $-6a + 20 + 3a + 8 = a + 35 + a \; ; \; a \in G$

Gesucht: $\{a \mid a \in G \text{ und } -6a + 20 + 3a + 8 = a + 35 + a\}$

$$-6a + 20 + 3a + 8 = a + 35 + a$$

$$-3a + 28 = 2a + 35 \quad / \; -2a - 28$$

$$-3a + 28 - 2a - 28 = 2a + 35 - 2a - 28$$

$$-5a = 7 \quad / \quad (-5)$$

$$\frac{-5a}{-5} = \frac{7}{-5}$$

$$a = -\frac{7}{5}$$

Probe: (1) $-6 \cdot (-\frac{7}{5}) + 20 + 3 \cdot (-\frac{7}{5}) + 8 = (-\frac{7}{5}) + 35 + (-\frac{7}{5})$

$$\frac{101}{5} = \frac{161}{5} \quad (w)$$

(2) $-\frac{7}{5} \notin 0 \quad (w)$

Die gefundene Aussage ist über Q nicht erfüllbar.

$$L = \{\}$$

b) Wähle eine andere Lösungsgrundmenge so, daß die gegebene Gleichung erfüllbar, aber nicht allgemeingültig ist. Gib hierzu so viel Möglichkeiten wie möglich an - z.B.:

$a \in Q, \quad a \in \{-\frac{8}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{5}{5}, -\frac{4}{5}\}, \ldots$

c) Gibt es eine Lösungsgrundmenge, über der die gegebene Gleichung allgemeingültig ist ? $L_G = \{-\frac{7}{6}\}$.

d) $\{u \mid u \in Q \text{ und } 8u + 3 - 4u = 16 + 4u - 2u\}$

$$4u + 3 = 4u - 4$$

$$3 - u = -7$$

$$L = \{\ \}$$

Gibt es eine Lösungsgrundmenge, über der die gegebene Gleichung erfüllbar ist ?

e) $\{y \mid y \in Q \text{ und } 7y - \frac{1}{2} + 3y - \frac{1}{4} = 10y - \frac{3}{4}\}$

$$10y - \frac{3}{4} = 10y - \frac{3}{4}$$

$$0 - y = 0$$

$$L = Q$$

Ist die gegebene Gleichung über N, Q, {reelle Zahlen}, usw. erfüllbar ? - allgemeingültig ?

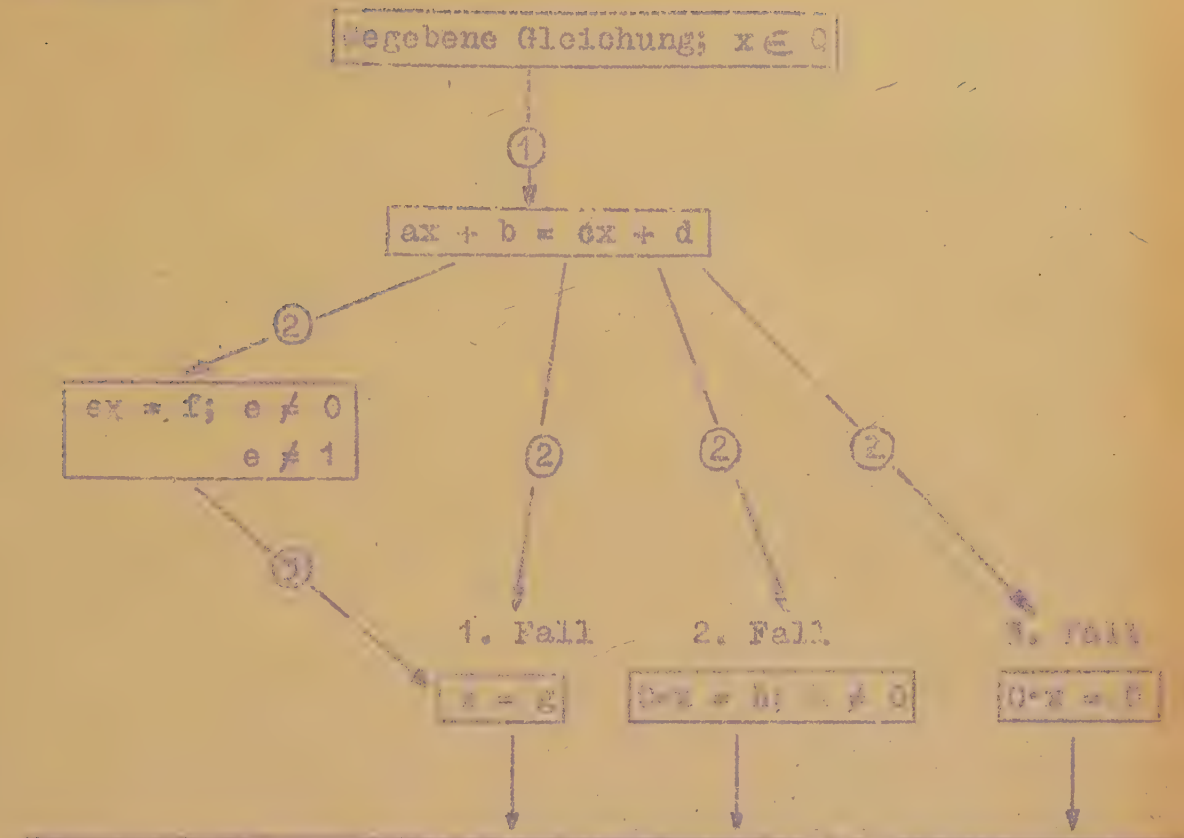
U XXI
Str IIb

4) Lösungsmöglichkeiten bezüglich der Menge der rationalen Zahlen, Erfüllbarkeit bezüglich dieser Lösungsgrundmengen, die Teilmengen von Q sind

a) Es ist die folgende Übersicht zu ergänzen. (1), (2), (3) bedeuten dabei die entsprechenden Umformungsregeln. x ist die Gleichungsvariable. a, b, c, d, e, f, g, h stehen für fest vorgegebene rationale Zahlen.

H 11

Übersicht:



Gleichung	erfüllbar, aber nicht allgemeingültig	nicht erfüllbar	allgemeingültig
Lösungen	genau eine	keine	alle rationalen Zahlen
Lösungsmenge	L = { g }	L = { }	L = Q

Falls die Lösungsgrundmenge eine Teilmenge von Q ist, so ist im 3. Fall L = Lg und falls g ∉ Lg, dann ist im 1. Fall L = { }.

b) Zur Wiederholung und Festigung der Kenntnisse über die vielfältigen Umformungen zwischen den verwendeten Begriffen und Aussagen sind Aufgaben wie der Grundlage

der Strukturfelder zu trennen.

Str Ia, Ib, IIb, IIc, III
U XXII
2. Kontrollarbeit 7/V

2.2.1.5. Weiterführung des Versuchs

1) Textaufgaben Proportionen

fortgesetzt.

-7cm lang." oder "Für die Arbeit sind 4 $\frac{1}{2}$ Arbeiter anzufordern" u. a. m.

Str V

Es ist auch besonderer Wert darauf zu legen, daß die-

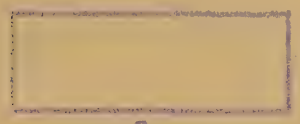
Zahlenwert auftreten.

für Zahlen.

proportionen führen, anzuwenden.

Textaufgabe: Die Weidefläche einer [illegible] hat die Form eines Rechtecks. Der Umfang beträgt 2880 m. Die Koppel ist fünfmal so lang wie breit. Welche Seitenlängen hat sie?

1. Einführen der Variablen (Bilden, Interpretieren von Formeln)



Die gesuchte Breite beträgt
b = x m

Die Länge ist a = 5x m

Der Umfang ist u = 2a + 2b

2. Aufstellen der Gleichung:
(es handelt sich dabei im allgemeinen meist um eine Gleichung zwischen Größen)

$$2a + 2b = 2880 \text{ m}$$
$$2x \text{ m} + 2 \cdot 5x \text{ m} = 2880 \text{ m}$$

3. Lösen der mathematischen Aufgabe:

$\{x \mid x \in \mathbb{Q} \text{ und } x > 0 \text{ und } 2x + 10x = 2880\}$

$$2x + 10x = 2880$$
$$12x = 2880$$
$$x = 240$$
$$L = \{240\} \text{ ; Probe}$$

4. Probe am Text:

b = 240 m | 2880 m = 2·240 m + 2 · 1200 m

a = 5 · 240 m = 1200m | 2880 m = 2880 m (w)

5. Antwortsatz:

Die Weidefläche ist 1200 m lang und 240 m breit.

2) Spätkontrolle

Nach etwa 6 Wochen wird eine Kontrollarbeit als Spätkontrolle geschrieben.

Kontrollarbeit 7/VI

3) Wiederholung am Ende des Schuljahres

Diese Wiederholung für das Stoffgebiet Zeichnungen wird auf der Grundlage von Übungsblättern durchgeführt, die Übungsblätter befinden sich im Anhang.
Vor Beginn und nach Abschluß der Wiederholung wird eine Kontrollarbeit geschrieben.

Eröffnungsarbeit: Kontrollarbeit 7/VII
Abschlußarbeit: Kontrollarbeit 7/VIII

2.2.2. Der Lehrgang 9. Klasse (Vgl. Tabelle 6 und Tabelle 9)

2.2.2.1. Vorgaben aus anderen Stoffgebieten

1) Im Kapitel "Arbeiten mit Variablen" /14, S. 38/ usw. /80, S. 5 bis 23/ haben die Schüler das Arbeiten mit Variablen und den Umgang mit Klammern kennengelernt. Ergänzend wird in den Vermutungsklassen erarbeitet, daß es sich um eine äquivalente Termumformung handelt, wenn man über Variablengrundmengenumformt, in denen für Terme T_1' und T_1 für alle Elemente definiert sind und den gleichen Wert für jede Belegung der Variablen durch dieselben Elemente der Grundmengen annehmen. Es wird erarbeitet, daß dann eine allgemeingültige Gleichung $T_1 = T_1'$ bezüglich der gemeinsamen Variablengrundmengen vorliegt. Der Begriff "Definitionsbereich eines Terms mit Variablen" wird erst in der 9. Klasse explizit definiert. Es wird gezeigt, daß man sich eine gemeinsame Grundmenge, über der man äquivalent umformen kann, gegebenenfalls erst verschaffen muß, z. B. im Falle von Termen, in denen keinerlei Variablen auftreten. Die Fallstellen aller auftretenden Terme sind dann aus den gegebenen Grundmengen auszuschließen; man hat

neue Grundbegriffe zugrunde zu legen. Die "Termumformung" wird jeweils konsequent verletzt, später wird dann der Begriff "Differenzmenge" eingeführt.

2) Im Kapitel "Ähnlichkeit" /62, S. 40/ wird der Begriff "Reelle Zahl" definiert. Die Menge der reellen Zahlen wird im Intervallschachtelverfahren mit $\mathbb{R}$ bezeichnet. Sie wird von nun an im Allgemeinen als neue Grundmenge bei Termumformungen zugrunde gelegt.

3) Im Kapitel "Lineare Funktionen" /69, S. 47/ wird in den Vorbemerkungen die Produktmenge $A \times B$ eingeführt. Funktionen werden als Mengen geordneter Zahlenpaare definiert. Es wird die Schreibweise $f = \{[x;y] \mid [x;y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und Funktionsgleichung$\}$ verwendet.
Die Begriffe "lineare Gleichung mit zwei Variablen," "Lösung einer linearen Gleichung mit zwei Variablen" und "Lösungsmenge" werden konsequent verwendet. Es wird damit neben einer Erweiterung und Vertiefung der Begriffe eine Vorarbeit für das Kapitel "System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen", 9. Klasse, geleistet.

2.2.2.2. Gleichungen mit Klammern oder Brüchen, die auf eine lineare Gleichung mit einer Variablen führen

1) Äquivalenzumformung und Probemenge

a) Beim 2. Versuch wird abweichend vom 1. Versuch die Äquivalenzumformung durch eine Kontrollmöglichkeit ersetzt.

Kontrollaufgabe 3/1

b) Aus der 7. Klasse sind die Umformungsregeln 1. a, 2, 3 für das äquivalente Umformen von Gleichungen bekannt. Die Lösungsgrundmenge war dabei die Menge der rationalen Zahlen oder eine echte Teilmenge davon.

Der Stoff der 7. Klasse ist unter Beachtung [illegible] der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Begriffen und Aussagen zu wiederholen und am [illegible] zu erweitern.

[illegible] IIa, IIb, IIc

2) [illegible]

a) Die Aufgabenstellung erfolgt im Schulbuch durch Angabe der Gleichung und der Variablengrundmenge (n). Der Begriff Lösungsgrundmenge wird im folgenden auch für die in der Mengenschreibweise der Lösungsmenge zu notierende und vom Schüler zu bestimmende Grundmenge für die Lösungen verwendet. Bei den Aufgaben der 7. Klasse war eine derartige Unterscheidung unnötig, da die gegebenen Variablengrundmengen stets gleichzeitig die Lösungsgrundmengen waren. Im weiteren wird die Lösungsgrundmenge im Falle einer Gleichung mit einer Gleichungsvariablen eine echte oder unechte Teilmenge der gegebenen Variablengrundmenge sein, und im Falle einer Gleichung mit mehreren Variablen Produktmenge aus den echten oder unechten Teilmengen der gegebenen Variablengrundmengen.

Es wird auf folgendes Ziel orientiert:
Es ist stets diejenige größte Teilmenge der gegebenen Variablengrundmenge (bei einer Gleichung mit einer Variablen) als Lösungsgrundmenge zu wählen, über der die Gleichung äquivalent umgeformt werden kann. Das bedeutet, daß man sie so bestimmen muß, daß alle in der Gleichung auftretenden Terme mit Variablen in ihr definiert sind und alle auszuführenden Umformungen äquivalente Umformungen sind. Der erste Lösungsschritt besteht im folgenden für den Schüler im Bestimmen der Lösungsgrundmenge und in der Angabe der Lösungsmenge in Mengenschreibweise.

b) Abweichend wird in der Wiederholung [illegible] anstelle von "und" das logische Symbol "∧" eingeführt.

Auf seine strenge Ableitung im Sinne der mathematischen Logik wird [illegible] eingegangen. (Im 1. Versuch erfolgte die Einführung des Symbols [illegible] in der 9. Klasse [illegible]

3) Gleichungen mit Klammern

a) MUSTERBEISPIEL: R_1, R_{11}

Gegeben: $x - (8x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 5)$; [illegible]

- Lösungsmenge in Mengenschreibweise:

$L = \{ x \mid x \in R \wedge x - (8x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 5) \}$

- Gleichung:

$$x - (8x - 69) + (6x - 50) = 2x - (x - 5)$$

Klammern auflösen:

Regel 1	$x - 8x + 69 + 6x - 50 = 2x - x + 5$	
Regel 2	$-x + 19 = x + 5$	$/ -x - 19$
Regel 3	$-2x = -14$	$/ : (-2)$

- Einfachste Gleichung: $x = 7$
- Lösungsmenge: 7 ist die einzige Lösung der letzten Gleichung [illegible]
- Probe für die Ausgangsgleichung:

(1) $7 - (56 - 69) + (42 - 50) = 14 - (7 - 5)$

Klammern ohne Variablen sind [illegible]!

$$7 - (-13) + (-8) = 14 - 2$$
$$12 = 12 \quad (w)$$

(2) $7 \in R$ (w)

- Lösungsmenge der Ausgangsgleichung: $L = \{ 7 \}$

b) Der Übungskomplex ist so anzulegen, daß alle Regeln für das Auflösen von Klammern [illegible] werden. Darüber hinaus sind [illegible] nicht [illegible] und allge-

mehrgültige Gleichungen und solche, die erst einer Teilmenge von R nicht erfüllbar sind, zu berücksichtigen. Bei zusätzlicher Angabe einer Grundmenge sind auch die Aufgaben im Lehrbuch /02, S. 166/ verwendbar.

c) An dieser Stelle ist die Bedingung $T_3 \neq 0$ der Regel 3 zu untersuchen.

1. Aufgabe:

Gegeben: $(a - 3)(a + 4) = (a - 7)(a - 3)$; $a \in R$

$$L = \{ a \; / \; a \in R \wedge (a-3)(a+4) = (a-7)(a-3) \}$$

1. Weg:

$(a-3)(a+4) = (a-7)(a-3)$

$a^2+a-12 = a^2-10a+21 \quad / -a^2+10a+12$

$11a = 33 \quad / :11$

$a = 3$

Probe: (1) $(3-3)(3+4)=(3-7)(3-3)$
$0 = 0$ (w)

(2) $3 \in R$ (w)

$L = \{ 3 \}$

2. Weg:

$(a-3)(a+4)=(a-3)(a-7) \quad / :(a-3)$

$a+4 = a-7$

$0 \cdot a = -11$

keine Lösung

Probe: Es gibt keine reelle Zahl, deren Produkt mit Null verschieden von Null ist.

$L = \{ \}$

Ergebnis: Die Gleichungen $(a - 3)(a + 4) = (a - 7)(a - 3)$ und $a + 4 = a - 7$ sind über R nicht äquivalent. Über R ist die Division durch den Term $(a - 3)$ keine äquivalente Umformung, da der Term $(a - 3)$ für die Zahl 3 den Wert Null annimmt und damit die Bedingung $T_3 \neq 0$ nicht erfüllt ist. Bei der Division durch $(a - 3)$ ist eine Lösung verlorengegangen. Solche Umformungen sind zu vermeiden!

2. Aufgabe:

Gegeben: $x + 5 = x - 1 \mid x \in \mathbb{R}$

$L = \{ x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x + 5 = x - 1 \}$

1. Weg:

$x + 5 = x - 1$

$0 \cdot x = -6$

$L = \{\ \}$

2. Weg:

$x + 5 = x - 1 \quad / \cdot (x + 6)$

$(x+6)(x+5) = (x-1)(x+6)$

$x^2+11x+30 = x^2+5x-6$

$6x = -36$

$x = -6$

$L = \{ -6 \}$

Ergebnis: Die Gleichungen $x + 5 = x - 1$ und $(x + 6)(x + 5) = (x - 1)(x + 6)$ sind zwar in $\mathbb{R}$ nicht äquivalent. Die Multiplikation mit $(x + 6)$ hat für die Zahl -6 keine äquivalente Umformung. Die Bedingung $T_g \neq 0$ ist nicht erfüllt. Es ist durch die Multiplikation mit $(x + 6)$ eine Lösung hinzugekommen. Die Probe verwirft solche unwahren Lösungen aus.

d) Problemstellung:

Gibt es bei der 1. und 2. Aufgabe Möglichkeiten, solche Terme als Lösungsgrundmengen anzugeben, bei denen nur äquivalente Umformungen auftreten, wenn z. B. durch $(x - 5)$ dividiert bzw. mit $(x + 6)$ multipliziert wird?

Ergebnis:

Es ist jeweils an eine solche Lösungsgrundmenge zu denken, die die "kritischen" Zahlen nicht enthält. Zu diesem Zweck wählen wir die größte Teilmenge der gegebenen Grundmenge, die diese Zahlen nicht enthält als Lösungsgrundmenge.

e) An dieser Stelle empfiehlt sich die Einführung des Begriffes DIFFERENZMENGE $A \setminus B$

Definition: Die Differenzmenge $A \setminus B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente von A, die nicht zu B gehören.

Es sind Beispiele dazu anzugeben, [illegible] auf richtiges Formulieren des Sachverhaltes [illegible] zu legen, z.B.: $R \setminus \{3, 4, 5\}$ ist die Differenzmenge aus der Menge der reellen Zahlen und der Menge, die die Elemente 3, 4 und 5 enthält.

f) In Weiterführung der Gedanken von d) ergibt sich:

1. $\{a \,/\, a \in R \setminus \{3\} \wedge$ [illegible] $\} = \{\ \}$

$\{a \,/\, a \in R \setminus \{3\} \wedge a+4 = a-7\} = \{\ \}$

2. $\{x \,/\, x \in R \setminus \{-6\} \wedge x+5 = x-1\} = \{\ \}$

$\{x \,/\, x \in R \setminus \{-6\} \wedge$ [illegible] $\} = \{\ \}$

Über den neuen Lösungsgrundmengen handelt es sich jeweils um äquivalente Gleichungen.

4) Gleichungen mit Brüchen

a) Gegeben: [illegible]

[illegible]

Das Ziel besteht zunächst darin, alle auftretenden Nenner zu beseitigen. [illegible] zu wiederholen. Gleichungen dieses Typs sind durch Multiplikation beider Seiten mit [illegible] aller auftretenden Nenner auf die [illegible]

erklären. Dieses Vorgehen dient als Vorbereitung auf Bruchgleichungen. – Es ist dabei ausdrücklich die Frage zu klären, daß die Multiplikation mit dem Hauptnenner, der hier keine Variablen enthält, über der gegebenen Grundmenge eine äquivalente Umformung ist.

- Gegebene Gleichung: $3x - \frac{2x+5}{7} = 16 - \frac{7x+19}{2} - \frac{2x+1}{3}$ / $\cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$

Mit dem Hauptnenner multiplizieren:

$3x \cdot 42 - \frac{2x+5}{7} \cdot 42 = 16 \cdot 42 - \frac{7x+19}{2} \cdot 42 - \frac{2x+1}{3} \cdot 42$

Klammern auflösen: $126x-(2x+5)\cdot 6 = 672-(7x+19)\cdot 21-(2x+1)\cdot 14$

Ausgangsform für Regel 1: $126x - 12x - 30 = 672 - 147x - 399 - 28x - 14$

Regel 1	$114x - 30$	$=$	$-175x + 259$	/ $+30 + 175x$
Regel 2	$289x$	$=$	289	/ $:289$
Regel 3				

- Einfachste Gleichung: $x = 1$
- Lösungen der einfachsten Gleichung: 1
- Probe: Die Probe ist unbedingt in der Ausgangsgleichung auszuführen!
- Lösungsmenge der Ausgangsgleichung: $L = \{1\}$

b) Der Übungskomplex hat noch nicht erfüllbare und allgemeingültige Gleichungen zu enthalten. Der Begriff „äquivalente Umformung" ist zu vertiefen. Die Lösungsformulierung aus dem Lehrbuch /82, S. 166/ wird bei ausdrücklicher Angabe einer Grundmenge verwendbar.

Str IIb

5) Einfache Bruchgleichungen [Str IV]

Definition: Gleichungen, bei denen mindestens eine Gleichungsvariable mindestens einmal im Nenner eines Bruchterms auftritt, nennen wir **Bruchgleichungen.** 30)

Im Folgenden werden wir Bruchgleichungen mit einer Variablen behandelt.

a) Beispiel 1: /82, S. 81/

Gegeben: $\frac{9}{x} + \frac{1}{2} = \frac{10}{x} + \frac{4}{9}$; $x \in R$

Das Ziel besteht zunächst darin, alle auftretenden Nenner mit der Variablen zu beseitigen, um die Ausgangsform für Regel 1 herzustellen. Es sind nur äquivalente Umformungen zu benutzen.
Als Lösungsgrundmenge ist deshalb $R \setminus \{0\}$ zu verwenden, da die Terme $\frac{9}{x}$ und $\frac{10}{x}$ für die Zahl 0 nicht definiert sind.
Die Multiplikation mit dem Hauptnenner $2 \cdot 9 \cdot x$ ist über $R \setminus \{0\}$ eine äquivalente Umformung, nicht aber über R.
Durch diese Betrachtungsweise wird die Zahl 0 sofort als mögliche Lösung ausgeschlossen.

$$L = \{x \mid x \in R \setminus \{0\} \wedge \frac{9}{x} + \frac{1}{2} = \frac{10}{x} + \frac{4}{9}\}$$

$$\frac{9}{x} + \frac{1}{2} = \frac{10}{x} + \frac{4}{9} \qquad | \cdot 2 \cdot 9 \cdot x$$

$$162 + 9x = 180 + 8x \qquad | -8x - 162$$

$$x = 18$$

Probe: (1) $\frac{9}{18} + \frac{1}{2} = \frac{10}{18} + \frac{4}{9}$ K[illegible]

$1 = 1$ (w)

(2) $18 \in R \setminus \{0\}$ (w)

$L = \{18\}$

b) Beispiel 2:

Gegeben: $\frac{3x + 4}{x + 1} = \frac{2x + 3}{x + 1}$; G = R

$L = \{x \,/\, x \in R \setminus \{-1\} \wedge \frac{3x + 4}{x + 1} = \frac{2x + 3}{x + 1}\}$

$$\frac{3x + 4}{x + 1} = \frac{2x + 3}{x + 1} \quad / \cdot (x + 1)$$

$$\frac{3x + 4}{x + 1} \cdot (x + 1) = \frac{2x + 3}{x + 1} \cdot (x + 1)$$

$$\frac{(3x + 4)(x + 1)}{(x + 1)} = \frac{(2x + 3)(x + 1)}{(x + 1)} \quad \text{Kürzen!}$$

$$3x + 4 = 2x + 3$$

$$x = -1$$

Probe: (-1) [illegible]
sind.

(-1) $\notin$ R \ {-1} (w)

$$\underline{L = \{\ \}}$$

c) Beispiel 3:

Gegeben: $\frac{5}{2x - 6} = \frac{7}{4x - 12}$; G = R

$L = \{x \,/\, x \in R \setminus \{3\} \wedge \frac{5}{2x - 6} = \frac{7}{4x - 12}\}$

Achtung: [illegible]
auszuklammern!

$$\frac{5}{2(x - 3)} = \frac{7}{4(x - 3)} \quad [illegible]$$

$$10 = 7$$

Das ist eine falsche Gleichheitsaussage

Behandlung als Proportion:

$$5(4x - 12) = 7(2x - 6)$$

$$20x - 60 = 14x - 42$$

$$6x = 18$$

Diese Gleichung ist über $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ nicht erfüllbar.

Auf beide Arten erhält man $L = \{\ \}$

/60, S. 167/, die durch Hinzufügen einer Grundmenge ex-

auch die Erfüllbarkeit bezüglich der ve

gleichungen mit bestimmten Nebenbedingungen bef

a) Der Schwierigkeitsgrad der Gleichungen usw. über solche

oder durch Ausklammern eines Zahlenfak

den sind, nicht hinausgehen. Es geht hier um ein erstes

dere Rechenschwierigkeiten. Kompliziertere Aufgaben fol-

Arbeitsblatt 8/

2.2.?.3. Lineare Gleichungen, in denen außer der Gleichungsvariablen noch Formvariablen auftreten

1) Begriffe und Bezeichnungen

a) Kommen in einer Gleichung mehrere Variablen vor und soll diese [illegible] werden (d. h. soll die Gleichung nach ihr aufgelöst werden), so soll diese ausgezeichnete Variable zur Unterscheidung von den anderen Variablen ([illegible]) in Zukunft "GLEICHUNGSVARIABLE" heißen.

b) Die anderen in der Gleichung auftretenden Variablen sind [illegible], da sie die Struktur oder Form für eine ganze Klasse von Gleichungen festlegen, sollen sie [illegible] "FORMVARIABLE" [31] genannt werden.

c) Es wird ferner folgende Vereinbarung getroffen:
Die Gleichungsvariable soll in Zukunft immer daran erkennbar sein, daß ihre Grundmenge bei der Aufgabenstellung zuerst genannt wird. In der Mengenschreibweise der Lösungsmenge erscheint die Gleichungsvariable vor dem senkrechten Strich. Die Lösungsmenge steht wie bisher [illegible]. Die Grundmengen für die Formvariablen werden hinter dem Doppelpunkt notiert.
Im allgemeinen werden die Formvariablen für reelle Zahlen stehen.

2) Beispiele

a) Gegeben: $2x - y = 2y + x$; $x \in R$, $y \in R$

Ohne die unter 1) c) getroffene Vereinbarung sind hier zwei verschiedene Aufgabenstellungen möglich:

(1) [illegible] Paare [illegible] Zahlen bestimmt werden, die diese lineare Gleichung mit zwei [illegible] sind beide [illegible] werden, welche von ihnen im geordneten Zahlenpaar

[illegible] erscheinen hat. Dieses Problem ist hier nicht zu untersuchen. Es wird in der 9. Klasse bei Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen wieder aufgegriffen.

[illegible] andere Formvariable. Dann [illegible] zwei Aufgabenstellungen möglich:

(a) $\{x \,/\, x \in R \wedge 2x - y = 2y + x\};\ y \in R$

(b) $\{y \,/\, y \in R \wedge 2x - y = 2y + x\};\ x \in R$

[illegible]

Aufgabe:

Die Schüler [illegible] SPEZIELLE GLEICHUNGEN aus der je[illegible]

(c) $2x - 6 = 12 + x,\ 2x + 3 = -6 + x,\ \ldots$

[illegible]

(5) Das Ziel besteht im Lösen der gegebenen Gleichung [illegible]

[illegible]

[illegible]

Es sind spezielle Gleichungen gleicher Struktur zu einer [illegible] zusammenzufassen, die durch eine Gleichung mit Formvariable darzustellen ist, z. B.:

(c) $-2x = 8,\ \frac{4}{5}x = -1,\ 24x = \frac{2}{3},\ \ldots,\ ax = b$

(d) [illegible] $= 1$, [illegible] $= 1$, [illegible] $= 1$, ..., [illegible] $= 1$

[illegible]
[illegible].

[Sie 15]

b) Folgende Begriffe sind an Hand der Aufgabenstellungen (a) und (b) zu erläutern; d. h. in Verbindung mit c).

Eine Gleichung mit Formvariablen LÖSEN heißt, solche Terme, in denen im allgemeinen die Formvariablen vorkommen, finden, die die Gleichung erfüllen. Ein derartiger Term ERFÜLLT die Gleichung, wenn er, [illegible] in die Gleichungs[illegible] eingesetzt, die Gleichung in eine wahre Aussage oder in eine allgemeingültige Gleichung überführt.

Jeder solche Term ist eine LÖSUNG der Gleichung. 32)
Die LÖSUNGSMENGE ist die Menge aller Lösungen.

c) Lösen von (a) und (b):

(a)	(b)
[illegible]	[illegible]
Lösen der Gleichung:	Lösen der Gleichung:
[illegible]	[illegible] / $-2x-2y$
[illegible]	[illegible]
$x = 3y$	$-3y = -x$ / $:(-3)$
	$y = \frac{x}{3}$
Lösung: [illegible] (Term mit der Formvariablen y)	Lösung: $\frac{x}{3}$
[illegible]	Probe: [illegible]
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]

(1) $3y \in R$, da $y \in R$ Lösungsmenge: $L = \{3y\}$	(2) $\frac{x}{3} \in R$, da $x \in R$ Lösungsmenge: $L = \{\frac{x}{3}\}$
spezielle Gleichung für $y = 6$: $2x - 6 = 12 + x$ Lösung: $3 \cdot 6 = 18$ Lösungsmenge: $L = \{18\}$	spezielle Gleichung für $x = 5$: $10 - y = 2y + 5$ Lösung: $\frac{5}{3}$ Lösungsmenge: $L = \{\frac{5}{3}\}$

3) Aufgaben

[illegible] ge:

1. Die Gleichung enthält eine Formvariable und ist [illegible] Gleichungsvariablen zu lösen (Vgl. das Einführungsbeispiel)
2. [illegible] als eine Formvariable und ist ohne Ausklammern der Gleichungsvariablen zu lösen.

Beispiel 1: $4x - a = 2x + b$; $x \in R$, $a \in R$, $b \in R$ [33]

$L = \{x \,/\, x \in R \wedge 4x - a = 2x + b\}$; $a, b \in R$

$$4x - a = 2x + b \quad / -2x + a$$

$$2x = b + a \quad / : 2$$

$$x = \frac{b + a}{2}$$

Probe: $4 \cdot \frac{b + a}{2} - a = 2 \cdot \frac{b + a}{2} + b$

$$2a + 2b - a = a + 2b$$

$$a + 2b = a + 2b$$

Das ist eine allgemeingültige Gleichung, denn es entstehen für jede Ersetzung von a und b durch reelle Zahlen eine wahre Gleichheitsaussage.

[illegible]

[illegible] eine spezielle Gleichung aus dieser Klasse hinzuziehen.

3. Die Gleichung enthält mehr als eine Formvariable. Um die Gleichung lösen zu können, ist die Gleichungsvariable auszuklammern.

Beispiel: $bx - a = ax + 2a$; $x \in R$; $a, b, c \in R$

$L = \{x \mid x \in R \wedge bx - a = ax + 2a\}$; $a, b, c \in R$

$$bx - a = ax + 2a \quad / -ax + a$$

$$bx - ax = 3a \quad / \text{ x ausklammern}$$

[illegible] $= (b - c)$

An dieser Stelle ist eine Fallunterscheidung [illegible]

2. Fall:

$b = c = 0$ bzw. $b = c$

Die Gleichung lautet:

$bx - a = bx + 2a \quad / - bx + a$

$0 \cdot x = 3a$

Hier hat man wieder zwei Fälle:

1. Fall:	2. Fall:
$a = 0$	$a \neq 0$

Proben: Auf Grund des Satzes, daß ein Produkt genau dann [illegible] Faktor Null ist.

$L = \mathbb{R}$	$L = \{\ \}$

3) [illegible] besonders die [illegible] zwischen den [illegible] Gleichungen und den [illegible] speziellen Gleichungen zu behandeln.

Str Ib, Str VI

Kontrollarbeit 8/III

2.1.2.4. Weiterführung des Versuchs

1) Bei Textaufgaben, die Gleichungen mit Klammern oder Bruchtermen ergeben, die auf lineare Gleichungen mit einer [illegible], wird die [illegible] Betrachtungsweise konsequent weitergeführt.

[illegible] wird eine Kontrollarbeit als "Spitkon-[illegible]" [illegible]

Kontrollarbeit 8/IV

[illegible] (Vgl. Tabelle 7 und Tabelle 10)

2.2.3.1. Vorgaben aus früheren Stoffgebieten

[illegible] Gleichungen und Ungleichungen [illegible] gelöst, wobei auch Klammern und einfache Bruchterme auftraten. [illegible] Gleichungen mit Formvariablen [illegible] " und "[illegible]" und "LÖSUNGSGRUNDMENGE" sind auch für eine lineare Gleichung [illegible].

[illegible] Termumformungen über der Menge der reellen Zahlen.

3) Die Kenntnisse über Grundbegriffe der Mengenlehre umfassen auch die Begriffe "Differenzmenge" und "Produktmenge".

[illegible] und die Definition der Quadratwurzel sind bekannt.

2.2.3.2. Gleichungen mit Bruchtermen, die auf eine lineare Gleichung mit einer Variablen führen (Ergänzung des Stoffes der 8. Klasse)

[illegible]

Die Aufgabenindividualisierung wird durch zwei Kontrollarbeiten fixiert. Dabei ist 9/I identisch mit 8/I und 9/II enthält lediglich mit anderen Zahlen drei Aufgaben aus 8/II bzw. 9/III. Die Arbeiten 9/I und 9/II werden in den Vergleichsklassen nicht geschrieben.

Kontrollarbeit 9/I
Kontrollarbeit 9/II

[illegible]

a) Die Regeln 2 und 3 für das äquivalente Umformen von Gleichungen werden wiederholt und ergänzend für [illegible] formuliert.

(Vgl. Lehrgang 8. Klasse)

[illegible] mit einer Variablen" definiert:

> Der Definitionsbereich eines Terms mit einer Variablen ist die Menge aller Elemente der Variablengrundmenge, für die der Term in ein Element der Variablengrundmenge übergeht.

Terme ohne Variablen haben keinen Definitionsbereich.

[illegible] dieser Gleichung

(Dieser Begriff wird im Versuch nicht eingeführt)

[illegible] den Termen mit Variablen u.ä.

[illegible] (Vgl. Lehrgang 8. Klasse).
Bei Gleichungen mit mehreren Variablen sind die Begriffe Definitionsbereich eines Terms und Lösungsgrundmenge einer [illegible]

[illegible]

[illegible] $\frac{1}{x-4}$ [illegible] Lösung zu untersuchen.

[illegible] Es ist (a) $L_1 = \{x \,/\, x \in R \wedge x = 4\} = \{4\}$

und (b) $L_2 = \{x \,/\, x \in R \wedge x + \frac{1}{x-4} = 4 + \frac{1}{x-4}\} =$ [illegible]

[illegible]

[illegible] Lösung verloren, da der Term $T_3 = \frac{1}{x-4}$ nicht über [illegible] $R \setminus \{4\}$ definiert, und nur wenn man diese Menge als Lö- [illegible]

(a) $L_1' = \{x \,/\, x \in R \setminus \{4\} \wedge x = 4\} = \{\,\}$

(b) $L_2' = \{x \,/\, x \in R \setminus \{4\} \wedge x + \frac{1}{x-4} = 4 + \frac{1}{x-4}\} = \{\,\}$

[illegible]

[illegible] eines Terms, der nicht über der vollen [illegible] 4), sind solche Umfo[illegible]

Beispiel 2: zu Regel 3 (Oder handelt es sich um eine [illegible]

[illegible]

(a) $L_1 = \{a / a \in R \wedge a(a - 2) = 3(a - 2)\} = \{2,3\}$

(b) $L_2 = \{a / a \in R \wedge a = 3\} = \{3\}$

[illegible]

da der Term T_3 für die Zahl 2 in ein Zeichen für die Zahl [illegible] übergeht.

Die Bedingung $T_3 \neq 0$ ist nicht erfüllt. Die Umformung der Terme $\frac{a(a - 2)}{(a - 2)}$ in den Term a ist nur über $R\setminus\{2\}$ eine äquivalente Termumformung. Wählt man deshalb $R\setminus\{2\}$ als Lösungsgrundmenge, dann ist die Anwendung von Regel 3 eine äquivalente Umformung:

(a) $L_1' = \{a / a \in R\setminus\{2\} \wedge a(a - 2) = 3(a - 2)\} = \{3\}$

(b) $L_2' = \{a / a \in R\setminus\{2\} \wedge a = 3\} = \{3\}$

Hinweis:

[illegible] T_3 [illegible] enthält, ist zunächst zu überprüfen, ob $T_3 = 0$ eine Lösung der Ausgangsgleichung liefert. Dann erst [illegible]

[illegible]

ist z. B. bei goniometrischen Gleichungen wichtig. [illegible]

(b) $L_2 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge \frac{x}{x} \pm \frac{1}{2}(x-2) = 1 \circ (x-2) \dots \frac{x}{x} \pm \frac{3}{2}(x-2)\} = \{\}$

(c) $L_3 = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x = 2\} = \underline{\{2\}}$

Äquivalent. Die Multiplikation mit $L_3 = (x - 2)$ ist keine

chen für die Zahl 0 übergeht. Es kommt beim Übergang von (a)

und die Anwendung von Regel 3 liefert äquivalente Gleichungen:

so zu bestimmen, daß die Multiplikation mit dem Hauptnenner garantiert eine äquivalente Umformung ist. Man erweitert man auch die Differenzmenge.

Stoff über Gleichungen vertieft und erweitert wird.

(zweistündig)

geschrieben. Die Vorbereitungsklasse 3 schreibt dieselbe Arbeit wie die Versuchsklassen. Bei den folgenden Arbeiten wird entsprechend verfahren.

tierung ist auch für die Schüler nützlich!)

eine lineare Gleichung mit einer Variablen

die Zahl der [illegible] wird erhöht

eine lineare ein Syste[m] mit zwei [illegible] zwei) [illegible]

eine Gleichung zweiten Grades mit einer Var.

eine Gleichung mit einer Var.

nach der gültigen Lehrplan und dem hier gewählten Lehrplan wird zuerst dieser Weg gewählt.

5. Systeme Linearer Gleichungen

Es werden zunächst nur Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen behandelt.

a) Es wird von einer linearen Gleichung mit zwei Variablen ausgegangen, z. B.:

ist die Produktmenge $R \times R$ der geordneten Variablengrundbereiche.
Die Lösungsmenge ist die Menge aller geordneten Zahlenpaare $[x;y]$, für die gilt:

1. $[x;y] \in R \times R$ und 2. $5x + 2y - 13 = 0$

Es ist also

$$L_1 = \{[x;y] \mid [x;y] \in R \times R \wedge 5x + 2y - 13 = 0\}$$

Offensichtlich existieren unendlich viele Zahlenpaare mit der gewünschten Eigenschaft, z. B.:

$$[3;-1] \in \{[x;y] \mid [x;y] \in R \times R \wedge 5x + 2y - 13 = 0\}$$

weitere Elemente von L_1 sind:

Die graphische Veranschaulichung der Lösungsmenge

zeigt eine Gerade.
Von besonderer Bedeutung für viele mathematische und praktische Probleme ist die Frage nach derjenigen Variablenpaaren $[x;y]$, die zwei lineare Gleichungen

dann von einem SYSTEM VON ZWEI LINEAREN GLEICHUNGEN

Beispiel 1:

Gegeben: I. $5x + 2y - 13 = 0$ [illegible]

II. $2x + 5y + 20 = 0$

[illegible]

Die Lösungsmenge L_1 der ersten Gleichung besteht, wie oben dargelegt, aus unendlich vielen Zahlenpaaren.

[illegible]

$[0;4]$, $[-10;0]$, $[2;-\frac{24}{5}]$, $[5;-6]$, ...

[illegible]

$L_1 = \{[x;y] \mid [x;y] \in R \times R \wedge 5x + 2y - 13 = 0\}$

$L_2 = \{[x;y] \mid [x;y] \in R \times R \wedge 2x + 5y + 20 = 0\}$

[illegible] L_2 gehören?

[illegible]

Durchschnitt.

[illegible]

[illegible]

$A \cap B = \{\}$ $A \cap B$ $A \cap B = B$

[illegible]

[illegible] $L = L_1 \cap L_2$:

In der Aufzählung einzelner Elemente findet sich in beiden Lösungsmengen [illegible] nämlich [5; -6]. Es gilt also [5;-6] ∈ [illegible] und [5;-6] ∈ L_2 [illegible]

Damit ist noch nicht gesagt, [illegible] Element gibt! [illegible] Veranschaulichungen der beiden [illegible], so [illegible] daß die [illegible] gemeinsamen [illegible] ist [illegible] eine [illegible] Das einzige Element [illegible] ist das Lösungspaar [5;-6].

Hinweis:

[illegible] Lösungsmenge [illegible] {a,b} und der Menge {[a;b]} ist [illegible]

Probe: (1) I. 5· 5 + 2·(- 6) - 13 = 0

25 - 12 - 13 = 0

0 = 0 (w)

II. 2· 5 + 5·(- 6) + 20 = 0

10 - 30 + 20 = 0

0 = 0 (w)

[illegible] beide [illegible] setzen ist.

(2) [5;-6] ∈ R × R (w)

Beispiel 2:

Gegeben:

I.	4x - y = 2	x ∈ R, y ∈ R
II.	[illegible] = -5	

Gesucht: 1. [illegible] Lösung ist.

2. Suche weitere Lösungen!

3. [illegible] L_1 [illegible] L_2 [illegible]

Beispiel 3:

Gegeben:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{I.} & y + 3x = -2 \\ \text{II.} & y + 3x = 3 \end{array}\right| \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$$

Gesucht: $L = \{[x;y] \mid [x;y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge y+3x = -2 \wedge y+3x = 3\}$

Die Tatsache, daß wir kein gemeinsames Zahlenpaar finden, können wir numerisch an mangelnden rechnerischen Lösungen. Betrachten wir die Gleichungen aber genauer, so sieht man, daß es unmöglich ist, ein gemeinsames Zahlenpaar $[x;y]$ zu finden, das beide Gleichungen erfüllt, denn:

$y + 3x$ soll einmal gleich -2 und zum anderen gleich $+3$ sein, was offenbar ein Widerspruch ist.

Das sagt, daß Geraden einen Widerspruch. Die Lösungsmenge ist in diesem Falle leer: $L = \{\}$.

Betrachtet man die graphischen Veranschaulichungen der beiden Lösungsmengen L_1 und L_2, so sieht man, daß es sich um parallele Geraden handelt, daß es also keinen gemeinsamen Punkt gibt.

Beispiel 4:

Gegeben:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{I.} & x + y = 2 \\ \text{II.} & 3x + 3y = 6 \end{array}\right| \quad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$$

Gesucht: $L = \{[x;y] \mid [x;y] \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \wedge x + y = 2 \wedge 3x + 3y = 6\}$

Wie man durch einsetzen bestätigt, gehören zur Lösungsmenge z. B. folgende Zahlenpaare:

$$[1;1]\ ;\ [-4;6]\ ;\ [4;-2]\ ;\ [2;0]\ ;\ \ldots$$

Es gibt unendlich viele Zahlenpaare, die beide Gleichungen erfüllen, genauer, jedes Zahlenpaar, das die erste Gleichung erfüllt, erfüllt auch die zweite und umgekehrt.
Das erkennt man leicht, wenn man die Gleichungen vergleicht

Die zweite Gleichung entsteht offenbar aus der ersten durch Multiplikation beider Seiten mit dem Faktor 2.

Die Lösungsmengen L_1 und L_2 stimmen überein; die Gleichungen sind äquivalent.
Man sagt in einem solchen Fall, also, wenn eine Gleichung aus der anderen durch Multiplikation beider Seiten mit einem von Null verschiedenen Zahlenfaktor hervorgeht, auch, die GLEICHUNGEN SIND LINEAR ABHÄNGIG. Die Lösungsmenge ist in diesem Falle $L = L_1 = L_2 = \left\{ [x;y] \mid [x;y] \in R \times R \wedge x + y = 2 \right\}$.
Es wird dabei die einfachere der beiden Gleichungen angegeben.

Betrachtet man die graphischen Veranschaulichungen der beiden Lösungsmengen L_1 und L_2, so sieht man, daß es sich um zwei zusammenfallende Geraden handelt, daß also alle Punkte gemeinsame Punkte sind.

b) <u>Lösbarkeitsfälle</u>

Darunter soll die Erfüllbarkeit des Gleichungssystems bezüglich $R \times R$ verstanden werden.
Es wird die Frage untersucht, ob weitere als die oben genannten Fälle auftreten können. Das geschieht auch an Hand der graphischen Darstellungen.
Betrachtet man die Beispiele 1 und 2, so stellt man fest, daß dort die GLEICHUNGEN WEDER IM WIDERSPRUCH STEHEN NOCH VONEINANDER LINEAR ABHÄNGIG SIND.

Es ergeben sich 3 <u>LÖSBARKEITSFÄLLE</u>:

(1) Die Gleichungen stehen nicht im Widerspruch und sind nicht voneinander linear abhängig

(2) Die Gleichungen stehen im Widerspruch und sind nicht voneinander linear abhängig

(3) Die Gleichungen sind voneinander linear abhängig und stehen nicht im Widerspruch.

ist die Lösbarkeitsfrage wird später noch genauer eingegangen. Hier gilt es lediglich an eine Darstellung der Problematik.

2) Verfahren zur rechnerischen Ermittlung der Lösungen von Systemen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen

a) Offensichtlich ist das Auffinden von Lösungen bzw. Lösungsmengen durch "Probieren" unzweckmäßig. Das Ziel besteht also wiederum darin, Regeln oder Verfahren zu finden, mit deren Hilfe man wieder mit schnell zur Lösungsmenge gelangt. Es soll dabei auf bekanntes zurückgegriffen werden, also auf die Kenntnisse über das Lösen einer linearen Gleichung mit einer Variablen. Die in diesem zu behandelnden Verfahren sind nichts als sinnvolle Zusammenfassungen (Hinweise auf graphisches Lösen, Determinanten, usw.)

Das Problem, so sich die Forderung, wurde ausschließlich mit äquivalenten Umformungen zu arbeiten, auch auf die Lösungsmengen übertragen lässt, ist nach der Erarbeitung des Lösungsverfahren zu untersuchen. Dabei sollen zwei Gleichungssysteme genau dann äquivalent heißen, wenn sie über der gleichen Lösungsgrundmenge auch die gleiche Lösungsmenge haben.

b) Die Lösungsverfahren

Als drei Verfahren (Gleichsetzungs-, Einsetzungsverfahren und Verfahren der gleichen Koeffizienten) werden parallel an Hand konkreter Gleichungssysteme erarbeitet - es wird ein System von zwei linearen Gleichungen mit eindeutig lösbaren Gleichungen zugrunde gelegt. Die Schüler haben das gegebene System darauf hin zu untersuchen.

Gegeben:

I.	$x - 2y = -3$	$x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$
II.	$4x - y = 2$	

Gesucht: $L = \{[x;y] \mid [x;y] \in R \times R \wedge x - 2y = -3 \wedge 4x - y = 2\}$

1. Verfahren: Gleichsetzungsverfahren
2. Verfahren: Einsetzungs- oder Substitutionsverfahren
3. Verfahren: Verfahren der gleichen Koeffizienten

Das Ziel, ähnlich auf eine lineare Gleichung mit einer Variablen zurückzuführen, wird auf drei verschiedenen Wegen realisiert.

1. Verfahren	2. Verfahren	3. Verfahren
I. $x - 2y = -3$	I. $x - 2y = -3$	I. $x - 2y = -3$
II. $4x - y = 2$	II. $4x - y = 2$	II. $4x - y = 2$
I. $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$	II. $y = 4x - 2$	I. $x - 2y = -3$
II. $y = 4x - 2$	I. $x - 2(4x-2) = -3$	II. $-8x + 2y = -4$
$\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} = 4x - 2$	$x - 8x + 4 = -3$	$-7x = -7$
$-\frac{7}{2}x = -\frac{7}{2}$	$-7x = -7$	
$x = 1$	$x = 1$	$x = 1$

In jedem Fall entsteht eine lineare Gleichung mit einer Variablen mit der Lösung 1.
Zur Bestimmung des Zahlenwertes für die andere Variable setzt man in eine der Ausgangsgleichungen anstelle von x die gefundene Zahl 1 ein. Man erhält durch äquivalentes Umformen die Gleichung y = 2 mit der Lösung 2.

Da die Ausgangsgleichungen nicht im Widerspruch stehen und nicht linear abhängig sind, gibt es genau eine Lösung des Gleichungssystems; vorausgesetzt, daß keine Rechenfehler auftreten, ist es das Zahlenpaar [1;2].

Probe: (1) I. $1 - 2 \cdot 2 = -3$

$-3 = -3$ (w)

II. $4 \cdot 1 - 2 = 2$

$2 = 2$ (w)

(2) $[1;2] \in R \times R$ (w)

Die Lösungsmenge des gegebenen Gleichungssystems ist

$$\underline{\underline{L = \{[1;2]\}}}.$$

c) Äquivalente Umformungen

Die Frage, ob bei den genannten Verfahren mit äquivalent Gleichungssystemen gearbeitet wurde, wird an Hand eines Beispiels untersucht.

Man stellt fest: 1. Wenn man eine oder beide Gleichungen des Systems mittels der Umformungsreg 1,2,3 umformt, dann ist das eine Äqui valente Umformung des Gleichungssyste Z.B.: $4x - y = 2$ wird durch Multiplik tion mit (-2) zu $-8x + 2y = -4$, die zweite Gleichung bleibt unverändert. Das neue System ist zum gegebenen äqu valent; die Lösungsmengen der beiden Systeme sind gleich.

2. Es wird jetzt der Übergangsschritt vo System zu einer Gleichung untersucht. Z.B. liefert die Addition beim 3. Ver fahren genau genommen

$$\begin{array}{l|l} \text{I.} \quad x - 2y = -3 & \\ \text{II.} \quad -8x + 2y = -4 & + \\ \hline -7x + 0 \cdot y = -7 & \end{array}$$

Betrachtet man diese Gleichung für sich, dann hat sie nicht dieselbe Lösungsmenge wie das Gleichungssystem. Ihre Lösungsmenge enthält alle Zahlenpaare $[1\,;y]$, also unendlich viele Zahlenpaare, unter denen das eine gesuch vorkommt. Man erhält also eine, die gesuchte Lösungsmeng umfassende Lösungsmenge, es wurde nicht äquivalent umge formt. Will man immer mit äquivalenten Gleichungssystem arbeiten, so muß man stets die zweite Bedingung, also hi eine der Ausgangsgleichungen hinzunehmen.

So wäre z.B.

I.	$x - 2y = -3$
II.	$x = 1$

wieder ein zum Ausgangssystem äquivalentes System.
Bei den anderen Verfahren liegen die Verhältnisse entsprechend.
Dagegen ist es zwar grundsätzlich möglich, aber umständlich und unzweckmäßig, nur mit äquivalenten Systemen zu arbeiten. Die Verfahren werden deshalb in der üblichen "verkürzten" Form gehandhabt. 36)

3) Ein Verfahren zum zeichnerischen Lösen von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen

Es ist dabei auf der Grundlage der Kenntnisse über Funktionen zu beachten:

1. Jedem geordneten Paar reeller Zahlen [x;y] ist eineindeutig ein Punkt P (x,y) im kartesischen Koordinatensystem zugeordnet.

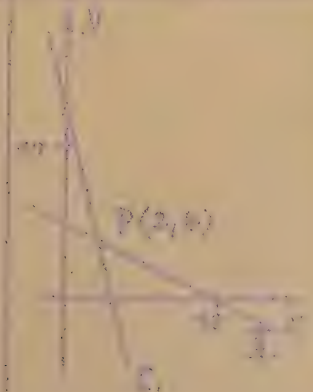
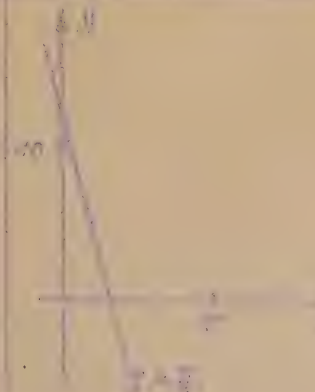
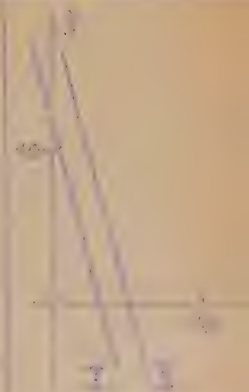
2. Der Lösungsmenge jeder Gleichung ist eineindeutig eine Punktmenge im kartesischen Koordinatensystem zugeordnet. Für R×R liefern die graphischen Veranschaulichungen der Lösungsmengen Geraden, bei gewissen Teilmengen von R×R als Grundmenge Punkte auf Trägergeraden.

3. Dem Durchschnitt der Lösungsmengen der einzelnen Gleichungen, also der Lösungsmenge des Gleichungssystems, ist eineindeutig der Durchschnitt der Punktmengen zugeordnet. Die Menge der gemeinsamen Punkte der Geraden entspricht der Lösungsmenge des Gleichungssystems (für R×R).

Aufgaben: Es werden einfache Gleichungssysteme gewählt, mittels welcher sowohl die rechnerischen als auch die zeichnerische Verfahren zu Fertigkeiten zu entwickeln sind. Dabei ist auch Wert darauf zu legen, daß die Schüler einen Blick für das jeweils rationellste rechnerische Verfahren bekommen.
Weiterhin ist auf die Frage der Genauigkeit zeichnerischer Verfahren einzugehen.

4) Übersicht über die Lösbarkeitsfälle

(Der Fall, daß in beiden Gleichungen alle Koeffizienten von x und y gleich Null sind, wird nicht betrachtet.)

	1. Fall	2. Fall	3. Fall
Gleichungen	Linear unabhängig und widerspruchsfrei	Linear abhängig und widerspruchsfrei	Linear abhängig
$x \in R$ $y \in R$	z.B.: I. $4x+y=12$ II. $x+2y=10$	z.B.: I. $4x+y=12$ II. $8x+2y=24$	z.B.: I. $4x+y=12$ II. $4x+y=20$
Lösungen	genau eine $[x;y]$	unendlich viele	keine
	$[3;0]$	z.B.: $[3;0]$, $[5;-8]$, $[1;4]$, $[0;12]$, ...	---
Lösungsmenge	$L = \{[3;0]\}$	$L = \{[x;y] / [x;y] \in R \times R \wedge 4x+y=12\}$	$L = \{\}$
	$L = \{[3;0]\}$	$L = \{[x;y] / [x;y] \in R \times R \wedge 4x+y=12\}$	$L = \{\}$
Geometrische Veranschaulichung	zwei sich schneidende Geraden	zwei zusammenfallende Geraden	zwei parallele Geraden
Schnittpunkte	ein Schnittpunkt	unendlich viele gemeinsame Punkte	kein gemeinsamer Punkt
Bild			

5) Aufgaben

dein. Dabei sind Gleichungen mit Klammern und mit Bruchtermen und auch solche mit Formvariablen einzubeziehen.

zu behandeln.

Lösungsverfahren zu bringen:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & a_1 x + b_1 y = c_1 \\ \text{II.} & a_2 x + b_2 y = c_2 \end{array}\right| \quad . \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}$$

die für reelle (oder, falls angegeben, andere) Zahl

hat man darauf zu achten, daß die Nullstellen der

[illegible] für eines der Lösungsverfahren

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \frac{1}{x+y} = \frac{2}{3x+1} \\ \text{II.} & \frac{1}{2x+1} = \frac{2}{7y} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \cdot (x+y)(3x+1) \\ \cdot (2x+1) \cdot 7y \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 3x + 1 = 2x + 2y \\ \text{II.} & 7y = 4x + 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x = 2y - 1 \\ \text{II.} & -4x + 7y = 2 \end{array}$$

Die Gleichungen sind linear unabhängig und widerspruchsfrei.
Es wird genau eine Lösung geben.

Lösungsverfahren anwenden

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & x = 2y - 1 \\ \text{II.} & -4(2y-1) + 7y = 2 \end{array}$$

$$-8y + 4 + 7y = 2$$
$$-y = -2$$
$$y = 2$$
$$x = 3$$

Probe: Sie ist einzeln für beide Ausgangsgleichungen durchzuführen!

(1) I. $\frac{1}{3+2} = \frac{2}{9+1}$

$\frac{1}{5} = \frac{1}{5}$ (w)

II. $\frac{1}{6+1} = \frac{2}{14}$

$\frac{1}{7} = \frac{1}{7}$ (w)

(2) $[3;2] \in$ [illegible] $\left\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$ [illegible] $\neq -2$ (w)

Lösungsmenge: $L = \{[3;2]\}$

b) bei Gleichungssystemen mit Formvariablen sind nur einfache Beispiele zu wählen, an denen wirklich alle nötigen Fallunterscheidungen korrekt ausgeführt werden können, ohne dabei einen allzu großen Aufwand treiben zu müssen.

5) Systeme von mehr als zwei linearen Gleichungen mit mehr als zwei Variablen

Es sind nur einfache Systeme von drei bzw. vier Gleichungen mit drei bzw. vier Variablen dem Fortgeschrittenen zu behandeln. Es ist das Einsetzungsverfahren zu verwenden und in seiner Bedeutung zu würdigen. Wichtig ist es, daß die Lösungsgrundmenge eine Produktmenge aus drei bzw. vier Mengen ist und daß die Elemente der Lösungsmenge geordnete Zahlentripel bzw. -quadrupel sind. Auf die Lösbarkeitsfälle ist nicht näher einzugehen.

Fortsetzung S/T

7) Die Weiterführung der Untersuchungen ermöglicht anschließend Textaufgaben, die auf Systeme von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen führen.

2.2.3.4. Quadratische Gleichungen

1) Problemstellung und Lösbarkeitsfälle

a) Ausgehend von den quadratischen Funktionen

$f = \{[x;y] \mid [x;y] \in R \times R \wedge y = ax^2 + bx + c\}$; $a,b,c \in R$, $a \neq 0$

und

$f = \{[x;y] \mid [x;y] \in R \times R \wedge y = x^2 + px + q\}$; $p,q \in R$

wird das Problem der Nullstellenbestimmung als Lösungsmenge einer Gleichung definiert.

Die Nullstelle des Funktionswertes 0 wird als dessen Schnittpunkt mit der y-Achse definiert: $f(x_0; 0)$.

Die rechnerische Bestimmung der Nullstellen einer quadratischen Funktion führt auf die Aufgabe, alle diejenigen reellen x-Werte zu bestimmen, für die $y = 0$ ist, das heißt:

$$\{x \,/\, x \in R \wedge Ax^2 + Bx + C = 0\};\ A, B, C \in R,\ A \neq 0$$

$Ax^2 + Bx + C = 0$ ist für die Gleichungsvariable x eine Gleichung zweiten Grades oder eine quadratische Gleichung. A, B, C sind dabei Formvariablen, die für vorgegebene reelle Zahlen stehen.
Man nennt $Ax^2 + Bx + C = 0$ die ALLGEMEINE Form der quadratischen Gleichung.
Für $A \neq 0$ kann man durch A dividieren und kommt zur äquivalenten Gleichung (vgl. dazu auch die Bilder der entsprechenden Funktionen)

$$x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A} = 0.$$

Setzt man $\frac{B}{A} = p$ und $\frac{C}{A} = q$, so erhält man die NORMALFORM der quadratischen Gleichung, wobei jetzt p und q die Formvariablen sind.
Bei einer quadratischen Gleichung nennt man Ax^2 bzw. x^2 quadratisches, Bx bzw. px lineares und C bzw. q absolutes Glied.

b) Da mit den bisherigen Methoden und Regeln für das Lösen von Gleichungen eine rechnerische Bestimmung der Lösungen quadratischer Gleichungen noch nicht möglich ist, wird zunächst bei den folgenden Gleichungen versucht, durch "Probieren" zum Ziel zu gelangen.

Beispiel 1: Gegeben : $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x \in R$

Gesucht: $L = \{x \,/\, x \in R \wedge x^2 + 2x - 3 = 0\}$

Man findet leicht, daß 1 und -3 Lösungen sind. Sie sind, wie später gezeigt wird, die einzigen Lösungen.

Die Lösungsmenge ist $L = \{1;\ -3\}$.

Hinweis: Der Unterschied zwischen $\{1; -3\}$ und $\{1, -3\}$ ist ausdrücklich klarzustellen!

Beispiel 2: Gegeben: $x^2 = -25 \quad ; \quad x \in R$

Gesucht: $L = \{ x \mid x \in R \wedge x^2 = -25 \}$

Da es keine reelle Zahl geben kann, deren Quadrat negativ ist, kann die Gleichung auch keine reellen Lösungen haben.

Die Lösungsmenge ist $L = \{\}$.

Beispiel 3: Gegeben: $x^2 + 10x + 25 = 0 \quad ; \quad x \in R$

Man findet die Zahl -5 als Lösung. Es ist, wie später gezeigt wird, die einzige Lösung.

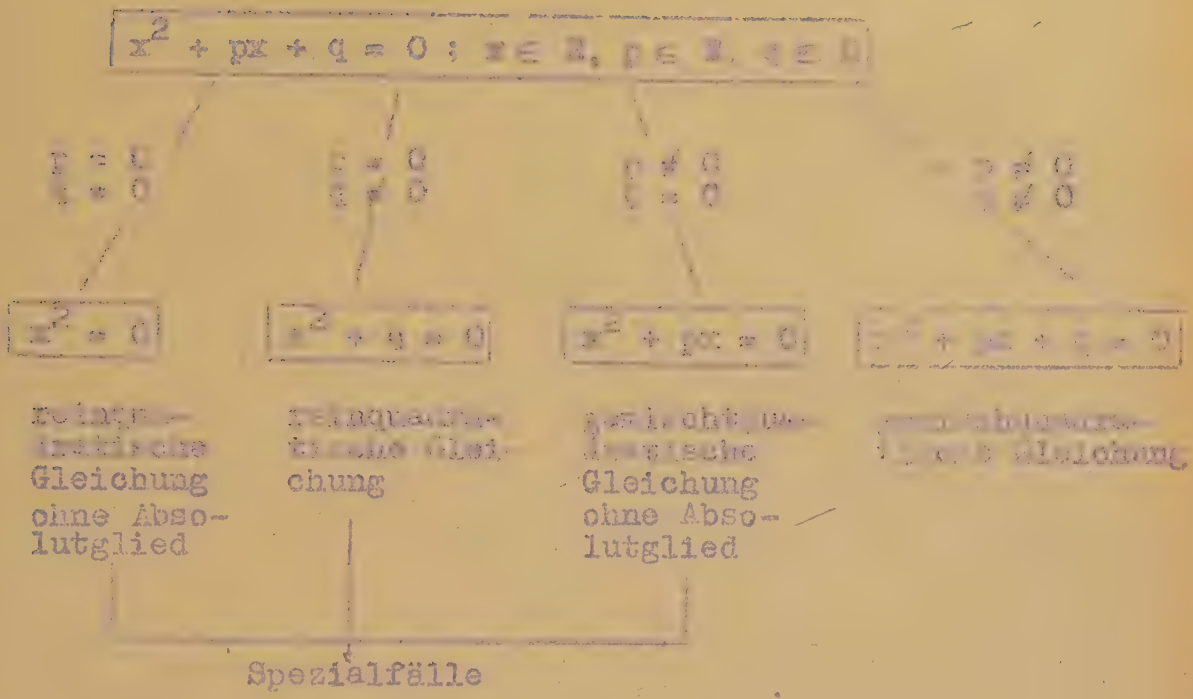
Die Lösungsmenge ist $L = \{-5\}$.

Man erkennt, daß es auch bei quadratischen Gleichungen verschiedene Lösbarkeitsfälle geben kann. Wenn man die graphische Darstellung der entsprechenden Funktionen betrachtet, so stellt man dort genau drei Fälle fest.

2) Das rechnerische Lösen quadratischer Gleichungen

Das Ziel besteht darin, Regeln zu finden, mit deren Hilfe man die quadratische Gleichung analytisch auflösen kann, d.h. schließlich die Lösungen sofort angeben kann. Es soll dabei wiederum das Bestreben, nämlich auf lineare Gleichungen mit einer Variablen zurückgeführt werden.

a) Da eine in allgemeiner Form gegebene quadratische Gleichung stets durch äquivalente Umformungen in die Normalform überführbar ist, gelingt es, Lösungsverfahren für diese zu entwickeln.



Aufgaben:

Die Schüler sollen gegebene Gleichungen einordnen bzw. richtig zuordnen, d.h. sollen entsprechende quadratische Gleichungen des jeweiligen Typs zu nennen.

b) Lösen der Spezialfälle

1. $x^2 = 0 \; ; \quad x \in R$

$L = \{x \mid x \in R \wedge x^2 = 0\}$

Die Gleichung $x^2 = 0$ kann nur die Lösungen $x_1 = x_2 = 0$ (Die Bezeichnungsweise $x_{1,2} = 0$ ist zu vermeiden!) haben, da für $x \gtrless 0$ stets $x^2 > 0$ ist und umgekehrt.

2. $x^2 + q = 0$; $x \in R$, $q \in R$, $q \neq 0$

$L = \{x \mid x \in R \wedge x^2 + q = 0\}$; $q \in R$, $q \neq 0$

Das Lösen dieser Gleichung beruht darauf, daß auf der linken Seite stehenden in q quadratischen Term T in ein Produkt $T_1 \cdot T_2$ zweier in x linearer Terme T_1 und T_2 äquivalent umformen. Das Produkt beider Terme ist genau dann Null, wenn $T_1 = 0$ oder $T_2 = 0$ (das "oder" ist hier im nicht ausschließenden Sinne gebraucht). Damit ist das Problem zurückgeführt auf das Lösen zweier linearer Gleichungen mit einer Variablen.

Diese Erkenntnis ist zunächst an Hand von Beispielen zu gewinnen:

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2)$

$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x + 3)(x - 3)$

$x^2 - 6 = x^2 - 6^2 = (x + 6)(x - 6)$

usw.

Klassische Formel:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a$

Es ist also z. B.: $x^2 - 9 = 0$ äquivalent $(x + 3)(x - 3) = 0$

äquivalent $x + 3 = 0$ oder $x - 3 = 0$

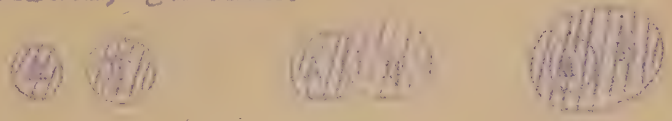
äquivalent $x = -3$ oder $x = 3$

$L = \{x \mid x \in R \wedge x^2 - 9 = 0\} = \{x \mid x \in R \wedge (x = -3$ oder $x = 3)\}$

An dieser Stelle empfiehlt sich die Einführung des Begriffs Vereinigung.

Definition: Die Vereinigungsmenge $A \cup B$ zweier Mengen A und B ist die Menge aller Elemente, die mindestens einer der Mengen A oder B (oder zu beiden) gehören.

Veranschaulichung:



Beispiele: $A \cup B$ $A \cup B$ $A \cup B$

Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung ist die Vereinigungsmenge der Lösungsmengen $L_1 = \{-3\}$ und $L_2 = \{3\}$ der beiden linearen Gleichungen: $\underline{L = L_1 \cup L_2 = \{-3, 3\}}$.

Für $x^2 + q = 0$; $x \in R$, $q \in R$, $q \neq 0$ heißt das:

$$x^2 + q = x^2 - (-q) = x^2 - (\sqrt{-q})^2 = (x + \sqrt{-q})(x - \sqrt{-q})$$

und damit:

$$x^2 + q = \text{äquivalent } (x + \sqrt{-q})(x - \sqrt{-q}) = 0$$

$$\text{äquivalent } x + \sqrt{-q} = 0 \text{ oder } x - \sqrt{-q} = 0 \quad 38)$$

$$L = \{x \,/\, x \in R \wedge x^2 + q = 0\} = \{x \,/\, x \in R \wedge (x + \sqrt{-q} = 0 \text{ oder } x - \sqrt{-q} = 0)\}; \; q \in R, q \neq 0$$

Nach der Definition der Quadratwurzel ist $\sqrt{-q}$ nur definiert für $q \leq 0$. Wegen $q \neq 0$ heißt das hier $q < 0$.

Für $q < 0$ ist $-q > 0$ und man erhält für die beiden linearen Gleichungen die reellen Lösungen $\sqrt{-q}$ und $-\sqrt{-q}$. Zusammenfassend schreibt man anstelle von $x_1 = \sqrt{-q}$ und $x_2 = -\sqrt{-q}$ als LÖSUNGSFORMEL

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}$$

Es ist ausdrücklich zu betonen, daß es sich hierbei lediglich um eine verkürzte Schreibweise handelt.

Probe: (1) für x_1 : $(\sqrt{-q})^2 + q = 0$

$$-q + q = 0 \quad (w)$$

für x_2 : $(-\sqrt{-q})^2 + q = 0$

$$-q + q = 0 \quad (w)$$

(2) $\sqrt{-q} \in R$ für $q < 0$

$-\sqrt{-q} \in R$ für $q < 0$

$(\pm\sqrt{-q} \notin R$ für $q > 0)$

Die Lösungsmenge ist $L = L_1 \cup L_2 = \{-\sqrt{-q}, \sqrt{-q}\}$.

ÜBERSICHT über die LÖSBARKEITSFÄLLE für $x^2 + \ldots = 0$, $x \in R$, q

Radikand	Lösungen	Lösungsmenge
$q < 0$	zwei verschiedene reelle Lösungen	$L = \{-\sqrt{-q}, \sqrt{-q}\}$
$q = 0$	eine reelle Doppellösung	$L = \{0\}$
$q > 0$	keine reellen Lösungen	$L = \{\ \}$

Aufgaben:

Es sind eine Reihe von Aufgaben zur Anwendung der Lösungsformel zu üben, wobei auch besonderer Wert auf die Lösbarkeitsfälle zu legen ist. Es sind auch Fragen der Erfüllbarkeit bezüglich verschiedener Teilmengen von R zu berücksichtigen.

3. $x^2 + px = 0$; $x \in R$, $p \in R$, $p \neq 0$

$L = \{x \mid x \in R \wedge x^2 + px = 0\}$; $p \in R$, $p \neq 0$

Ausklammern von x führt zur äquivalenten Gleichung $x(x + p) = 0$. Daraus folgt $x = 0$ oder $x + p = 0$. Diese beiden linearen Gleichungen haben die Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -p$, also die Lösungsmengen $L_1 = \{0\}$ und $L_2 = \{-p\}$.

Probe: (1) $0^2 + p \cdot 0 = 0$ (w)

$(-p)^2 + p \cdot (-p) = 0$

$p^2 - p^2 = 0$ (w)

(2) $0 \in R$ (w)

$-p \in R$ (w)

Die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung ist

$$L = L_1 \cup L_2 = \{0 , -p\} .$$

ÜBERSICHT über die LÖSBARKEITSFÄLLE für

$x^2 + px = 0 , x \in R, p \in R.$

Die Gleichung hat stets zwei reelle Lösungen, von denen eine Null ist.

Aufgaben dazu.

c) Die Lösungsformel für die Gleichung $x^2 - px + q = 0$, $x \in R$, $p \in R$, $q \in R$, $p \neq 0$, $q \neq$

$x^2 + px + q = 0$, $x \in R$, $p \in R$, $q \in R$, $p \neq 0$, $q \neq 0$

$L = \{x \mid x \in R \wedge x^2 + px + q = 0\}$; $p \in R$, $q \in R$, $p \neq 0$, $q \neq 0$

Das Lösen dieser Gleichung beruht darauf, durch die QUADRATISCHE ERGÄNZUNG ein vollständiges Quadrat zu erhalten und damit die Gleichung auf eine reinquadratische Gleichung zurückzuführen.

Die quadratische Ergänzung ist das Quadrat des halben Koeffizienten des linearen Gliedes in der Normalform

Nach dem Üben der quadratischen Ergänzung kann der Gedankengang zunächst an einem Zahlenbeispiel erarbeitet werden. Es ist aber auch möglich, den allgemeinen Fall sofort parallel zu diesem Beispiel zu bearbeiten.

Beispiel:

$$x^2 + 2x - 3 = 0;\ x \in R$$

$x^2 + 2x \boxed{+1} \boxed{-1} - 3 = 0$ — quadratische Ergänzung

$(x + 1)^2 - 4 = 0$ — reinquadratische Gleichung in $(x + 1)$

Typ: $z^2 + a = 0$ — Lösungsformel für reinquadratische Gleichungen anwenden

$z_{1,2} = \pm\sqrt{4}$

$(x + 1)_{1,2} = \pm 2$

ausführlich geschrieben heißt das:

$x + 1 = 2$ oder $x + 1 = -2$

bzw.

$x_1 = 1\ ;\ x_2 = -3$ — Lösungen der Ausgangsgleichung

(1) $1^2 + 2 \cdot 1 - 3 = 0$

$1 + 2 - 3 = 0$ (w)

$(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 0$ — Probe

$9 - 6 - 3 = 0$ (w)

(2) $-3 \in R$ (w) ; $1 \in R$ (w)

$L = \{-3, 1\}$ — Lösungsmenge der Ausgangsgleichung

Allgemein: $x^2 + px + q = 0\ ;\ x \in R,\ p \in R,\ q \in R,\ p \neq 0,\ q \neq 0$

$x^2 + px \boxed{+ \left(\frac{p}{2}\right)^2} \boxed{- \left(\frac{p}{2}\right)^2} + q = 0$

$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0$

Typ: $z^2 + a = 0$

$\left(x + \frac{p}{2}\right)_{1,2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Und daraus ergibt sich die Lösungsformel:

$$\boxed{x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Probe:

(1) $\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right) + q = 0$

$\left(\frac{p}{2}\right)^2 \mp p\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q - \frac{p^2}{2} \pm p\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} + q = 0$

$\frac{p^2}{4} + \frac{p^2}{4} - q - \frac{p^2}{2} + q = 0$

$0 = 0$

(2) $-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \in \mathbb{R}$ für $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$

$-\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \notin \mathbb{R}$ für $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$ und $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q < 0$

Die Lösungsmenge ist somit für $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$

$$\mathbb{L} = \left\{-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\ ,\ -\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\right\}$$

Die Einschränkung $p \neq 0$, $q \neq 0$ kann man fallen lassen, da die Formel, wie sich leicht zeigen läßt, auch für die Spezialfälle gilt.

ÜBERSICHT über die LÖSBARKEITSFÄLLE für

$$x^2 + px + q = 0 \; ; \quad x \in \mathbb{R},\ p \in \mathbb{R},\ q \in \mathbb{R}$$

Der Term $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$, also der Radikand der Formel, wird auch als DISKRIMINANTE D bezeichnet.

Diskriminante	Lösungen	Lösungsmenge
$D > 0$	zwei verschiedene reelle Lösungen	$L = \{ -\frac{p}{2} + \sqrt{D}, -\frac{p}{2} - \sqrt{D} \}$
$D = 0$	zwei zusammenfallende reelle Lösungen (Doppellösung)	$L = \{ -\frac{p}{2} \}$
$D < 0$	keine reellen Lösungen	$L = \{ \}$

Ist als Variablengrundmenge eine Teilmenge von R gegeben, so wird die Gleichung zunächst über R nach der Lösungsformel gelöst. Dann wird untersucht, ob die so gefundenen Zahlen Elemente der durch die Variablengrundmenge gegebenen Lösungsgrundmenge sind.

Aufgaben: Die Anwendung der Lösungsformel ist an Hand von Aufgaben steigenden Schwierigkeitsgrades zur Fertigkeit zu entwickeln.

d) Das graphische Lösen quadratischer Gleichungen

Auf Grund der Kenntnisse über quadratische Funktionen werden 2 Verfahren behandelt:

1. Die Normalparabel wird verschoben

   Dabei erfolgt die Bestimmung des Scheitelpunktes mittels der quadratischen Ergänzung und nicht durch eine auswendig zu lernende Formel!

2. Die Normalparabel mit der Gleichung $y = x^2$ wird mit der Geraden mit der Gleichung $y = -px - q$ zum Schnitt gebracht.

e) Aufgaben:

Es werden Aufgabenfolgen und Übungsaufgaben steigenden

Schwierigkeitsgrades herangezogen (Vgl. dazu auch Kapitel 3.4.).

Str IIb, IIc, IV

f) Satz von Viete, Vektorenzerlegung

Es ist Wert darauf zu legen, daß die Schüler, gesteuert durch den Lehrer, zunächst zu einer Vermutung über die Zusammenhänge zwischen den Lösungen der quadratischen Gleichung in Normalform und den Koeffizienten des linearen Gliedes bzw. dem absoluten Glied kommen. Dann ist eine Behauptung aufzustellen, die allgemein zu beweisen ist.

Kontrollarbeit 9/VI

(Im ersten Versuch mußte die 3. Aufgabe für die Vergleichsklassen weggelassen werden)

2.2.3.5. Weiterführung des Versuchs

1) Sie erfolgt bei Textaufgaben, die auf eine quadratische Gleichung führen.

2) Nach etwa 6 Wochen wird eine Kontrollarbeit als SPÄTKONTROLLE geschrieben.

Kontrollarbeit 9/VII

2.2.4. Der Lehrgang 10. Klasse

2.2.4.1. Ausgangssituation

In den Versuchs- und Vergleichsklassen wird zur Feststellung der Ausgangssituation und um die Frage des Behaltens zu untersuchen, zu Beginn des Schuljahres die Kontrollarbeit der 9. Klasse noch einmal geschrieben.

Kontrollarbeit 10/I (= 9/V

2.2.4.2. Weiterführung des Versuchs

Vor allem bei den Winkelfunktionen sind die im Lehrgang entwickelten Grundgedanken weiterzuführen (Vgl. dazu /12/). Es sind einfache goniometrische Gleichungen sowie inhaltliche Überlegungen zu lösen.
Bei der Wiederholung ist besonderer Wert zu legen auf begriffliche Klarheit, Erkennen von Zusammenhängen und sprachlich einwandfreies Formulieren mathematischer Sachverhalte.

2.2.4.3. Spätkontrolle

Am Ende der Stoffvermittlungsperiode wird eine Kontrollarbeit als Spätkontrolle geschrieben.

Kontrollarbeit 10/II

2.3. Die Arbeitsgemeinschaft "Gleichungen und Ungleichungen" für die 8. Klasse

2.3.1. Zielstellung

Die im Schuljahr 1965/66 für die neun besten Schüler der 8. Versandklassen den 1. Versuche von mir durchgeführte Arbeitsgemeinschaft hatte folgende Zielstellung:

Der laufende Stoff über Gleichungen sollte vertieft und ergänzt werden. [39] Es sollte weiterhin untersucht werden, zu welchen Leistungen über die Anforderungen des Lehrgangs hinaus die besten Schüler fähig sind.

Im einzelnen waren folgende Stoffinhalte vorgesehen:

1) Vertiefung und Erweiterung der Kenntnisse über Mengen. Einführung der Begriffe "Teilmenge einer Menge", "Durchschnitt zweier Mengen", "Vereinigung zweier Mengen"

2) Behandlung von Äquivalenzrelationen. Arbeiten mit den logischen Operationen "oder" (in nicht ausschließendem Sinne, "$\vee$") und "und" (sowohl als auch, "$\wedge$").

3) Regeln für das Äquivalente Umformen von Ungleichungen. Bestimmen der Lösungsmengen linearer Ungleichungen mit einer Variablen und ihre graphische Veranschaulichung.

4) Behandlung linearer Gleichungen und Ungleichungen mit einer Variablen, die Absolute Beträge enthalten.

5) Behandlung von diophantischen Gleichungen als lineare Gleichungen mit zwei Variablen bezüglich $\mathbb{Z} \setminus \{0\} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ als Lösungsgrundmenge.

2.3.2. <u>Der Stoffverteilungsplan der Arbeitsgemeinschaft</u>

Die Arbeitsgemeinschaft umfaßte 26 Doppelstunden. (Die Tabelle 12 zeigt den Stoffverteilungsplan)
Die schriftlichen Leistungskontrollen sind im folgenden mit AG/I, AG/II, ... AG/XIII bezeichnet. Sie befinden sich im Anhang.

2.3.3. <u>Bemerkungen zur Stoffbehandlung</u>

In der Arbeitsgemeinschaft wurde besonderer Wert auf die Selbsttätigkeit der Schüler gelegt. Die methodischen Grundgedanken des Lehrgangs (Übungskomplexe auf der Grundlage des Strukturprinzips, Komplexgestaltungsprinzipien usw.) wurden auch in der Arbeitsgemeinschaft verfolgt. Besondere Aufmerksamkeit wurde dem selbständigen Problemerkennen und Problemlösen geschenkt. Es wurde viel mit Impulsen und individuellen Anleitungen gearbeitet.
Auf eine Darlegung des Lehrgangs für die Arbeitsgemeinschaft wird hier verzichtet. Im Rahmen der Auswertung der Untersuchungen (vgl. Kapitel 4.4.) wird auch einiges zur Auswertung der Arbeitsgemeinschaft gesagt.

Spezielle methodische Grundlagen

4.1 Zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten

Die Entwicklung geistiger Fähigkeiten ist eines der zentralen Probleme unserer sozialistischen Bildung und Erziehung. In der vorliegenden Arbeit geht es um einen speziellen Beitrag zur Fähigkeitsentwicklung von seiten des Mathematikunterrichts.

In der Mathematikkonzeption heißt es: "Die planmäßige Schulung geistiger Fähigkeiten und Fertigkeiten im Mathematikunterricht trägt in hohem Maße dazu bei, die für jeden Menschen in sozialistischer Gesellschaft erforderliche Disponibilität zu entwickeln". An anderer Stelle wird die Forderung erhoben: "Vorrangig und zielstrebig müssen solche Fähigkeiten entwickelt werden, die für das selbständige Erkennen und Lösen von Problemen bedeutungsvoll sind. Die Vermittlung von mathematischen Begriffen, Definitionen, Sätzen und Formeln darf nicht getrennt gesehen werden von der Schulung des Verständnisses und des logischen Denkens anhand konkreten mathematischen Stoffes" /59, S. 438/.

Der in vorangehenden Kapitel dargestellte Lehrgang "Gleichungen" bildete die Ausgangsbasis für die Untersuchungen zur Fähigkeitsentwicklung. Die Gründe für die Wahl gerade dieses Stoffgebietes wurden bereits im Kapitel 3. dargelegt. Es wurde im folgenden versucht, den Schwerpunkt unseres speziellen Beitrages im Rahmenvorhaben der Forschungsgemeinschaft "Entwicklung geistiger Fähigkeiten" der Sektion Pädagogik/Psychologie der Karl-Marx-Universität Leipzig (im folgenden kurz Forschungsgemeinschaft "Fähigkeitsentwicklung" genannt) herauszuarbeiten. Es werden dazu einige im Lehrgang durchgeführte spezielle methodische Überlegungen zur Fähigkeitsentwicklung, besonders im Hinblick auf die Entwicklung der Fähigkeit, Zusammenhänge zu erkennen, dargestellt. Ihren Folgen entsprechende Hilfsmittel zur Steuerung des Fähigkeitsentwicklungsprozesses und schließlich spezielle, unmittelbar für die Praxis gedachte Hilfen für den Lehrer.

Die theoretische Grundlage für die Probleme der Fähigkeits-
Öffentlichungen, von denen vor allem /22/, /23/, /24/, /25/,
/26/, /31/, /58/, /61/, /62/, /64/ /73/ /76/, /77/, /93/, /95/
/11/, und /12/
wir uns aber auf die Ergebnisse der Forschungsgemeinschaft
"Fähigkeitsentwicklung". Wenn letztere auch im Verlauf un-
serer Untersuchungen zum Teil erst entstanden sind und wei-
terentwickelt und präzisiert wurden, so blieb doch die Grund-
konzeption im wesentlichen die gleiche. Wir werden deshalb
im folgenden besonders von den neuesten Publikationen dieser
Forschungsgemeinschaft (z.B. /23/, /25/, /26/) und insbesonder
werden.
Hinsichtlich der Bestimmung des Begriffs "geistige Fähigkeit"
allgemeinerter geistiger Tätigkeiten den Menschen für die
gesellschaftlicher Erfahrungen geeignet machen". /24, S.27/.
(Vgl. auch /26, S.27/).
Speziell mit mathematischen Fähigkeiten beschäftigt sich be-
sonders V.A.Krutetzki /61/, /62/. Es geht ihm dabei um Fähig-
keiten zum Erlernen der Mathematik im Unterricht, und er be-
tont, daß ein umfassendes, selbständiges und schöpferisches
Studium der Mathematik Voraussetzung ist
Fähigkeiten, die den Erfolg der Lerntätigkeit im Unterri
fach Mathematik bestimmen,
Grundkomponenten der mathematischen Fähigkeiten. (Vgl. /61,
S. 15 bis 45/)

In unserem Zusammenhang wird an das Problem der Fähigkeitsentwicklung im Fach Mathematik unter einem etwas anderen Aspekt herangegangen. Natürlich geht es auch hier um die Herausbildung von Fähigkeiten im Mathematikunterricht, aber insbesondere um einen Beitrag, den der Mathematikunterricht zur Herausbildung allgemeiner geistiger Fähigkeiten zu leisten vermag. Ganz speziell soll der Versuch unternommen werden, diese Zuarbeit zur allgemeinen Fähigkeitsentwicklung mittels eines speziellen mathematischen Aufgabentyps zu untersuchen.

<u>Zum Problem "geistige Tätigkeiten"</u>

Geistige Fähigkeiten wurden als Niveau verallgemeinerter geistiger Tätigkeiten definiert. Den Zusammenhang zwischen Fähigkeiten und Tätigkeiten schreibt [illegible]: "Geistige Fähigkeiten sind aber nicht nur eine notwendige Voraussetzung für die erfolgreiche Ausübung von Tätigkeiten, sondern sie entwickeln sich im Prozeß des Bewältigens von Leistungsanforderungen. In diesem Zusammenhang wird oft vom Doppelcharakter der Fähigkeiten gesprochen: sie sind sowohl Voraussetzung als auch Ergebnis der geistigen Tätigkeit. /24,S.27/

Geistige Fähigkeiten entwickeln sich beim Ausüben geistiger Tätigkeiten. Man erhält deshalb über die Tätigkeiten einen Zugang zur Entwicklung von Fähigkeiten.

Zum Begriff "geistige Tätigkeit" schreibt [illegible]: "Geistige Tätigkeit der Schüler ist Vollzug von Denkprozessen zur Bewältigung von Leistungsanforderungen". /24,S.[illegible]/ Dabei ist es wichtig zu betonen, daß es sich um einen Prozeß handelt, der nicht zu verwechseln ist mit einer zufälligen Summe von einzelnen geistigen Operationen.

<u>Zum "Katalog geistiger Tätigkeiten für Schüler im Mathematikunterricht der Klassen 5 bis 10"</u>

Wenn man spezielle Untersuchungen über geistige Tätigkeiten durchzuführen beabsichtigt, muß man sich ganz darüber im klaren sein, daß es sich bei geistiger Tätigkeit zur Bewältigung einer Leistungsanforderung immer um einen Komplex von geistigen Tätigkeiten handelt, die in enger Wechselwirkung zueinander stehen. Man hat weiterhin zu beachten, daß nicht die geistigen Tätigkeiten allein für den Prozeß der Bewältigung .

einer Leistungsanforderung unerläßlich sind, sondern auch Kenntnisse, Verhaltensweisen, Einstellungen, Charaktereigenschaften u.a.. Das heißt, daß die Forderung nach einer planmäßigen Herausbildung geistiger Tätigkeiten zum Zwecke der Entwicklung geistiger Fähigkeiten niemals losgelöst vom Gesamtanliegen unseres Bildungssystems, der Entwicklung allseitig gebildeter sozialistischer Persönlichkeiten, gesehen werden darf. Sie kann nur ein wesentlicher Bestandteil dieser Persönlichkeitsentwicklung sein (vgl. dazu auch: Thesen zu /24/ These 4).

In diesem Sinne ist der Versuch zu verstehen, von einem speziellen Stoffgebiet aus dessen Beitrag zur Entwicklung geistiger Fähigkeiten auf dem Wege über die speziellen Tätigkeiten des Stoffgebietes zu untersuchen.

Die Notwendigkeit dieser Trennung war zu Beginn der vorliegenden Untersuchungen noch nicht mit aller Konsequenz erkannt worden. Da es zu dieser Zeit im wesentlichen um die Erprobung des neuen Lehrgangs ging, war eine Zusammenstellung der für das Stoffgebiet wesentlichen Tätigkeiten zunächst in erster Linie im Hinblick auf [illegible] vorgenommen worden.
In dem Maße wie sich die Untersuchungen immer stärker der methodischen Gestaltung des neuen Lehrganges zuwandten, erfolgte auch eine immer stärkere Hinwendung zu Problemen der Fähigkeitsentwicklung. Der "Katalog geistiger Tätigkeiten der Schüler im Fachunterricht der Klassen 5 - 10" eröffnete dann eine Möglichkeit der Einordnung des speziellen Vorhabens in das Anliegen der Forschungsgemeinschaft "Fähigkeitsentwicklung".

Um die Zuarbeit des Stoffgebietes Gleichungen zur Fähigkeitsentwicklung steuern zu können, war es nötig, den Zusammenhang zwischen den mathematischen Tätigkeiten des Stoffgebietes Gleichungen und den im "Katalog" fixierten fachübergreifenden Tätigkeiten aufzudecken.

Wir stützen uns im folgenden auf die von D.Faust und L.Fischer ausgearbeitete Fassung des Katalogs (/25,S.234 bis 250,/Stand vom Oktober 1967) und die durch H.Faust in seiner Dissertation /24,S. 43f./ vorgenommene Überarbeitung. Zur Entstehungsgeschichte dieses Katalogs, die auch unsere Untersuchungen beeinflußte, und zu den von ihm vorgenommenen Veränderungen

nimmt H.Faust in seiner Arbeit ausführlich Stellung (Vgl./24, S.38 bis 44/), so daß wir hier darauf verzichten.

In der Tabelle 13 wird derjenige Ausschnitt aus dem Katalog herausgegriffen, der für unsere Zwecke wesentlich ist. Das soll aber in keiner Weise auf eine Verkennung der engen Zusammenhänge zwischen allen in Katalog aufgeführten Tätigkeiten hindeuten.

Wir führen (1) und (2) von Tabelle 13 noch weiter aus:

(1) Verfahren zum Verallgemeinern (Vgl./24/)

- Probleme erfassen und Begriffe und Aussagen gewinnen sowie Schlüsse ziehen mit Hilfe der komplexen geistigen Tätigkeiten
  - Abstrahieren
  - Verallgemeinern
  - Vergleichen
  - Klassifizieren
  - Definieren
  - Konkretisieren
  - Beweisen
  - Begründen u.a.

---

(2) Anwenden verallgemeinerter theoretischer Verfahren (Vgl./24, S.256/)

- Sprachliches, zeichnerisches, graphisches und modellierendes Darstellen
- Induktives und deduktives Anwenden von Begriffen, Aussagen, Formeln und Regeln
- wissenschaftlich-theoretisches Vorausschauen

Hinsichtlich des Verhältnisses zwischen den als "geistige Operationen" bezeichneten Erscheinungsformen von Analyse und Synthese und den komplexen geistigen Tätigkeiten Abstrahieren, Verallgemeinern, usw. stimmen wir mit H.Faust überein, (Vgl. /24, S. 43/), daß die geistigen Operationen einen übergreifenden Charakter haben und nicht einer bestimmten Bereich der geistigen Tätigkeit zugeordnet werden können. Wir meinen aber, daß auch gewisse komplexe geistige Tätigkeiten, bei denen eine der geistigen Operationen eine dominierende Funktion aus-

übt und der Charakter dieser komplexen geistigen Tätigkeit bestimmt" (Vgl. /24,S.47/), nicht nur beim "Vordringen zum Wesentlichen und Allgemeinen" eine Rolle spielen, sondern auch zum Teil beim "Anwenden vorwiegend im theoretischen Bereich", nämlich beim "induktiven und deduktiven Anwenden von Begriffen, Aussagen, Formeln und Regeln". Zumindest gilt das für das Abstrahieren und das Konkretisieren.

Die Tabelle der Tätigkeiten des Stoffgebietes Gleichungen (Tabelle 14)

Die unter (1) aufgeführten komplexen geistigen Tätigkeiten werden zur schnelleren Verständigung mit T_i $(i = 1,2,.....,8)$ bezeichnet:

T_1 : Abstrahieren
T_2 : Verallgemeinern
T_3 : Vergleichen
T_4 : Klassifizieren
T_5 : Definieren
T_6 : Konkretisieren
T_7 : Beweisen
T_8 : Begründen

Weitere derartige Tätigkeiten werden nicht aufgenommen. [40]
Zur Einordnung der speziellen Tätigkeiten des Stoffgebietes Gleichungen in den Katalog der geistigen Tätigkeiten werden zunächst diejenigen mathematischen Grundtätigkeiten stoffgebietsübergreifenden Charakters zusammengestellt, auf die es im Stoffgebiet wesentlich ankommt. Wir bezeichnen sie mit G_j $(j = 1,2,....,12)$ und ordnen sie, wenn möglich, denjenigen T_i zu, die für sie die entscheidende Rolle spielen. Darüber hinaus erwies es sich als zweckmäßig, noch sogenannte modifizierte Grundtätigkeiten und spezifische Tätigkeiten der Gleichungslehre einzuführen. Modifizierte Grundtätigkeiten M_k $(k = 1,2,....,10)$ nennen wir dabei solche Tätigkeiten, die Grundtätigkeiten, bezogen auf den Stoff der Gleichungslehre sind. Als spezifische Tätigkeiten der Gleichungslehre S_l $(l = 1,2,...,8)$ bezeichnen wir solche Tätigkeiten, die nur speziell in der Gleichungslehre auftreten und nicht unmittelbar einer Grundtätigkeit zuzuordnen sind. Aus der Tabelle 14

st ersichtlich, wie die A_k und L_l auf die G_j zurückführbar ind. Auf dem Wege über die G_j ist damit auch ihre Zuordnung zu en T_j zu verfolgen.

Bemerkungen zur Auswahl der Tätigkeiten für die Tabelle

1) Die in der Tabelle 14 fixierten Tätigkeiten stellen keine Klasseneinteilung dar. Sie überschneiden und bedingen einander teilweise.

2) Die Zusammenstellung wurde empirisch gewonnen. Das heißt, die aufgeführten Tätigkeiten haben sich im Verlauf der unterrichtspraktischen Untersuchungen aus sachlogischen und methodischen Gründen als entscheidend für das Lösen aller Aufgabenstellung des Stoffgebietes erwiesen.

3) Die qualifizierten Grundtätigkeiten und die spezifischen Tätigkeiten sind zurückführbar auf stoffgebietsübergreifende mathematische Grundtätigkeiten. Da sie sich dem Schüler aber vorwiegend oder zum Teil erstmalig an dieser Stelle in der Mathematik darbieten, sind sie für ihn zunächst völlig neu zu erlernende Tätigkeiten und werden zunächst auch als solche eingeordnet. Daß sie im weiteren Verlauf der mathematischen Ausbildung in allgemeineren mathematischen Tätigkeiten aufgehoben werden, muß dem Schüler im Laufe der Zeit bewußt werden. Die Tabelle weist deshalb die wesentlichen Zurückführungen aus.

4) Die Tätigkeiten der Tabelle weisen einen sehr unterschiedlichen Grad an Komplexität auf. Auch ihr Schwierigkeitsgrad ist sehr unterschiedlich. Er hängt wesentlich neben der Anzahl der auszuführenden Grundtätigkeiten davon ab, wieviele und welche Definitionen, Sätze, Regeln und Formeln des laufenden und vorangehenden Stoffgebiete für die erfolgreiche Ausführung der Tätigkeit als Wissensstoff unbedingte Voraussetzung sind.

5) Die Auswahl der Tätigkeiten hängt auch noch davon ab, ob als Bezugspunkt das Gewinnen von Begriffen, Aussagen, Regeln usw. gewählt wird, das heißt die Einführung neuen Stoffes, oder der Umgang mit schon vermittelten Begriffen, Regeln, Sätzen.

usw., also die Vertiefung und Festigung. In unserem Zusammenhang lag der Schwerpunkt auf letzteren. Es werden also insbesondere die Tätigkeiten ins Auge gefaßt, die der Schüler beim Lösen der [illegible] des Stoffgebietes Gleichungen auszuüben hat.

Von diesem Gesichtspunkt hängt es dann auch ab, zu welchen Tätigkeiten von (1) schwerpunktmäßig die Zuordnung erfolgt. Während [illegible] bei der Aufnahme [illegible] illustrieren, Definieren [illegible] eine Rolle [illegible] bei der Vertiefung und Festigung vor allem [illegible], Vergleichen, Klassifizieren und [illegible].

Die [illegible] der [illegible] des Stoffgebietes [illegible] Tätigkeiten wird einmal als Mittel zur Durchführung von Fehleranalysen benutzt (Vgl. Kap. [illegible]) und zum anderen, um methodische Möglichkeiten zu [illegible] der Aneignung gewisser Tätigkeiten [illegible]. So gesehen stellt die Tabelle ein Hilfsmittel aber auch eine Zielorientierung dar.

Bekanntlich wird [illegible] der einzelnen Tätigkeiten mitbestimmt durch [illegible], [illegible], usw. Dieser Gesichtspunkt geht in die Tabelle natürlich nicht ein. Es wird nur bei der Auswertung der Unterrichtsversuche (Vgl. Kap. 5.3.2.) etwas dazu gesagt werden.

Die Anlage der Tabelle 14 erfolgte derart, daß von (1) und (2) nur der Ausschnitt [illegible], auf den es hier ankommt. Es wurde [illegible] (2) [illegible] Formen [illegible] nicht mit aufgenommen und außerdem erfolgte eine [illegible] auf das [illegible], worunter wir das [illegible] und [illegible] in [illegible] Sprache und das Darstellen in formalisierter mathematischer Sprache verstehen wollen.

Die Zurückführung auf [illegible] Tätigkeiten erfolgt im allgemeinen in Form eines [illegible], der wie folgt zu verstehen ist: Es wird schrittweise auf Tätigkeiten der weiter links stehenden Spalte der Tabelle 14 zurückgeführt. Schließlich gelangt man so zu den [illegible] und damit auch zu den [illegible], die man an letzter Stelle im [illegible] erscheinen. Der Weg der Zurückführung ist [illegible] ersichtlich

Für die Begriffsbestimmungen der verwendeten Begriffe sei auf die Darstellung des Lehrgangs verwiesen (vgl. Kap. 2.1.1.). Es wird hier nur ergänzt, wie der Begriff "einfachste Gleichung" verstanden werden soll. Wir legen fest, daß wir in unserem Zusammenhang die folgenden Gleichungstypen als einfachste Gleichungen bezeichnen wollen: $x = a$; $0 \cdot x = b$, $b \neq 0$; $0 \cdot x = 0$; $(x - x_1)(x - x_2) = 0$; x_1, x_2 beliebig, $x_1 \neq x_2$.

Die Tätigkeiten T_7 und T_{10} sind in besonderem Maße vom Schwierigkeitsgrad der Aufgabenstellung abhängig und können von Aufgabe zu Aufgabe von sehr unterschiedlicher Komplexität sein. Sie werden deshalb im allgemeinen in den Fehleranalysen noch weiter zerlegt.

Alle weiteren zum Lösen von Aufgabenstellungen des Stoffgebiets benötigten Tätigkeiten lassen sich auf die Tätigkeiten der Tabelle zurückführen bzw. aus ihnen zusammensetzen. So ist z.B. das Ausführen der Probe für eine Gleichung oder ein Gleichungssystem darstellbar als $(G_3, G_5, G_6, G_8; T_3, T_6)$.

Wie die Tabelle zeigt, wird in keinem Falle auf die komplexen geistigen Tätigkeiten T_2 (Definieren), T_7 (Beweisen), T_8 (Begründen) zurückgeführt. Das bedeutet lediglich, daß diese Tätigkeiten nicht vorrangig beim Lösen der untersuchten Aufgabenstellungen auftreten, nicht, daß sie gar nicht benötigt werden.

Die Tabelle 14 läßt sich sofort auf Ungleichungen erweitern, indem überall dort, wo Gleichung bzw. Gleichheitsaussage steht, Ungleichung bzw. Ungleichheitsaussage geschrieben wird. Die Tabelle wird im folgenden auch in diesem Sinne angewandt.

Überblick über die Aufgabenstellung des Stoffgebietes mit Hilfe von Strukturbildern

Dieser Überblick wird hier auf der Grundlage sogenannter Strukturbilder [41] hergestellt und zwar insofern, daß eine Zurückführung auf die Tätigkeiten des Stoffgebiets möglich wird.

Da die Zuordnung von Tätigkeiten bei der Ausarbeitung eines Lehrgangs langfristig zu planen ist, haben wir dem Lehrgang eine Zielvorstellung und Leitprinzipien zugrundegelegt (vgl. Kap. 2.1.4.).

Eine solche Orientierungsgrundlage ist notwendig und erstrebt, bedarf aber weiterer methodischer Konkretisierung, um für den Unterricht wirklich praktikabel zu sein.

Die Tätigkeiten eines bestimmten Stoffgebietes erlernt der Schüler im Umgang mit den Begriffen und Aussagen dieses Stoffgebietes. Zum anderen aber ist die Beherrschung der Tätigkeiten wieder Voraussetzung für das erfolgreiche Arbeiten mit Begriffe und Aussagen.
Aus diesem Grunde ist es sehr wesentlich, daß der Schüler eine möglichst gute Einsicht in die vielfältigen Beziehungen und Zusammenhänge zwischen den Begriffen und Aussagen gewinnt, um sie richtig mit ihnen arbeiten lernen, die Realität besser erfassen und richtige Schlüsse ziehen.

Der Lehrer muß für diesen Zweck die geeigneten Aufgabenstellungen bereithalten. Das kann er nur, wenn er selbst einen genauen Überblick über alle wesentlichen Problemkomplexe des Stoffgebietes hat. Davon ausgehend kann er dann die entsprechenden Übungskomplexe zusammenstellen, die ein allseitiges Erfassen der Zusammenhänge garantieren.

Den erforderlichen Überblick über die möglichen Problemkomplexe kann man sich z.B. mit Hilfe von Tabellen oder Übersichten verschaffen. Hier wurde anders vorgegangen.
Wir haben mit den schon erwähnten Strukturbildern gearbeitet. (Vgl. Kap. 3.2.1. und 3.2.2.)
Sie erscheinen uns besonders zweckmäßig, weil man mit einem Blick den gesamten Problemkomplex überschauen kann. Es läßt sich außerdem erreichen, daß man alle grundlegenden Problemstellungen des Stoffgebietes durch eine begrenzte Anzahl von Strukturbildern erfaßt. Durch geeignete Zusammensetzung erhält man dann sämtliche Aufgabenstellungen des Stoffgebietes. Es ergibt sich also gewissermaßen ein System von Strukturbildern, das das gesamte Stoffgebiet überdeckt.

Im folgenden werden zunächst die grundlegenden Strukturbilder I. a,b,c, II. a,b,c und III. angegeben und die jeweils daraus resultierenden Aufgabenstellungen. Dann folgen die zusammengesetzten Strukturbilder IV., V., VI. mit ihren Aufgabenstellungen.

Wir werden die Aufgabenstellungen für eine Gleichung mit einer Variablen formulieren. Sie gelten aber entsprechend auch für Ungleichungsaxiome oder für Ungleichungen.

Ausgehend von den Strukturbildern wird schließlich gezeigt, wie sich sämtliche Aufgabenstellungen auf eine Folge von Tätigkeiten (Vgl. Tabelle 14) zurückführen lassen.

3.2.1. Grundaufgaben

Es sollen hier diejenigen Aufgabenstellungen sein, die zu den grundlegenden Strukturbildern I. a, b, c, II. a, b, c und III. a gehören. Der Klammerausdruck gibt zu jeder Aufgabenstellung die Zuordnungsvorschrift auf die Tätigkeiten der Tabelle 14 an.

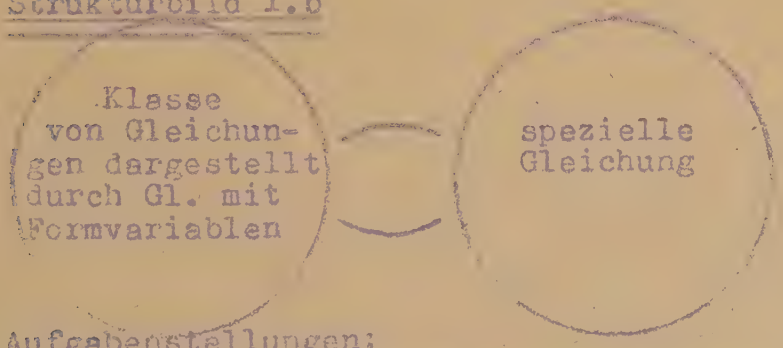
Strukturbild I.a

Aufgabenstellungen:

1. Bilde zu einer Gleichung mit Variablen Gleichheitsaussagen! (M_6; G_6, G_8; T_6)

2. Fasse Gleichheitsaussagen gleicher Struktur zu einer Gleichung mit Variablen zusammen! (M_7; G_7, G_9; T_2)

Strukturbild I.b

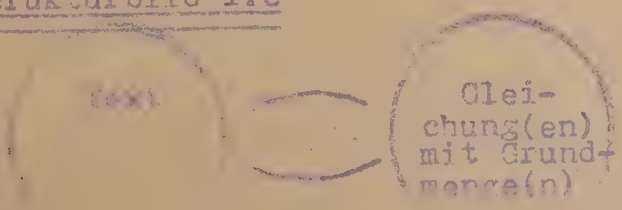


Aufgabenstellungen:

1. Gib eine spezielle Gleichung aus einer gegebenen Klasse an! (M_3; G_2, G_8; T_3, T_6)

2. Fasse Gleichungen zu Klassen zusammen! (M_4; G_1, G_4; T_2, T_5)

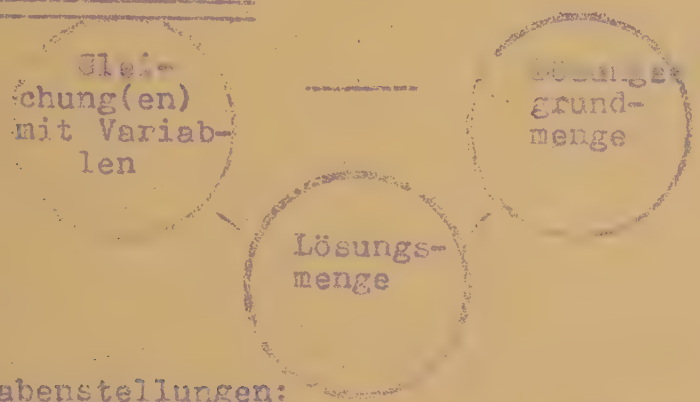
Strukturbild I.c



Aufgabenstellungen:

1. Übertrage einen in natürlicher Sprache gegebenen Sachverhalt, der auf eine Gleichung mit Variablen führt, in die formalisierte Sprache der Aussagenlogik! (M_{10}; G_3; S_1)
2. Übertrage einen durch eine Gleichung mit Variablen gegebenen Sachverhalt in die natürliche Sprache! (G_3; S_{11}; V_4)

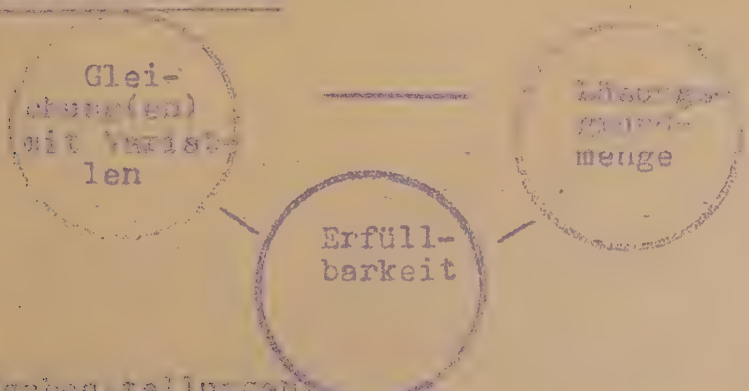
Strukturbild II.a



Aufgabenstellungen:

1. Gib die Lösungsmenge für eine Gleichung mit Variablen bezüglich ihrer Lösungsgrundmenge an!
   (S_3, S_5, S_7 ; $G_1, G_3, G_4, G_5, G_8, G_{10}$; T_3, T_4, T_6)
2. Gib eine mögliche Gleichung mit Variablen aus einer vorgegebenen Klasse an, wenn ihre Lösungsmenge und ihre Lösungsgrundmenge gegeben sind! (S_4; T_3 ; G_2, G_7, G_9, G_{10} ; S_2, S_7)
   Bemerkung: Der triviale Fall, eine einfachste Gleichung anzugeben, sollte im allgemeinen ausgeschlossen werden.
3. Gib eine mögliche Lösungsgrundmenge an, wenn eine Gleichung mit Variablen und eine Menge, die sie als Lösungsmenge haben soll, gegeben sind! (G_1, G_3; T_3, T_4)

Strukturbild II.b



Aufgabenstellungen:

1. Entscheide, ob eine gegebene Gleichung mit Variablen über

tig (allgemeingültig, nicht erfüllbar) ist!
$(S_3, S_5, S_7 ; G_1, G_3\ (G_4), G_5, G_8, G_{10} ; T_3, T_4, T_6)$

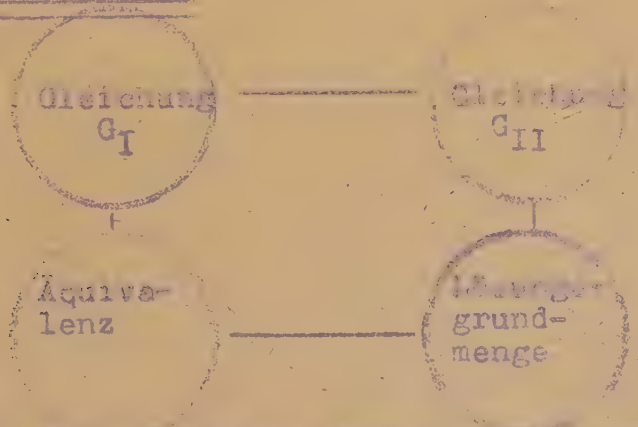
Gib eine über einer gegebenen Lösungsgrundmenge erfüllbare, aber nicht allgemeingültige (allgemeingültige, nicht erfüllbare) Gleichung aus einer vorgegebenen Klasse an!
$(S_3, S_5, S_7 ; G_2, G_3(G_4), G_8, G_{10} ; T_3, T_6)$

Gib eine mögliche Lösungsgrundmenge an, über der eine gegebene Gleichung mit Variablen erfüllbar, aber nicht allgemeingültig (allgemeingültig, nicht erfüllbar) ist!
$(S_3, S_5, S_7 ; G_1, G_3, (G_4), S_5, S_8, S_{10} ; T_3, T_4, T_6)$

rukturbild II.c:

rd für die Variablengrundmenge der umfassendste, den Lebbare Zahlbereich gewählt und ist die Lösungsgrundmenge R bzw. R X R , so soll anstelle von "Erfüllbarkeit" von "Lösbarkeitsfall" gesprochen werden. Das Strukturbild und die Aufgabenstellungen sind entsprechend II.b. Die Aufgabenstellung 3. entfällt aber.

rukturbild III. :



merkung: Da es bei den Gleichungen G_4 und T_4 nicht auf die Reihenfolge ankommt, liefert das Strukturbild III. nur drei und nicht vier verschiedene Aufgabenstellungen. Da es weiterhin nur sinnvoll ist, von der Äquivalenz zweier Gleichungen bezüglich der gleichen Lösungsgrundmenge zu sprechen, wird das durch A_{II} (Vgl. Kap. 3.3.1.) erledigte Problem hier nicht mehr behandelt, so daß das vorgegebene Strukturbild mit vier Elementen ausreicht.

Aufgabenstellungen:

1. Entscheide, ob G_2 und G_{11} über einer gegebenen Lösungsgrundmenge äquivalent sind oder nicht!
(G_3, G_5, G_6, G_7; $G_1, (G_4), G_8, G_9, G_{10}$; T_3, T_4, T_6)

2. Gib zu einer Gleichung G_1 eine zweite Gleichung G_{11} an, die bezüglich der gegebenen Lösungsgrundmenge zu ihr äquivalent ist! (G_3, G_5, G_6, G_7 ; $G_2, (G_4), G_8, G_9, G_{10}$; T_3, T_4, T_6)

3. Gib eine möglichst kleine Lösungsgrundmenge an, über der folgende Gleichungen äquivalent sind!
(G_3, G_5, G_6, G_7; $G_1, (G_4), G_8, G_9, G_{10}$; T_3, T_4, T_6)

Bemerkung: Die Aufgabenstellung 3. wird im allgemeinen nur im Hinblick auf das Auffinden der größtmöglichen Lösungsgrundmenge gebraucht, über der man äquivalent umformen kann. - Den trivialen Fall, daß diese Lösungsgrundmenge leer ist, sollte man nicht strapazieren.

Wie aus den obigen Ausführungen hervorgeht, wurde bei der Verwendung der angegebenen Strukturbilder so verfahren, daß ein Element des Strukturbildes gesucht und die übrigen gegeben waren.

Die auf die genannte Weise innerhalb eines Problemkreises entstehenden Aufgabenstellungen sind für die Entwicklung mathematischer Fähigkeiten, und besonders für das Erkennen von Zusammenhängen, alle notwendig und gleichwertig. Lassen sie doch alle in gleicher Weise dann Teil, die Zusammenhänge allseitig zu durchleuchten und die für das Stoffgebiet wesentlichen Tätigkeiten herauszubilden.

In der Gleichungslehre werden zwar im Hinblick auf den späteren Hauptverwendungszweck von Gleichungen (Lösen von Problemen aus anderen Teilgebieten der Mathematik, aus Physik, Chemie, Technik, usw. mit Hilfe von Gleichungen und Gleichungssystemen) zwei Hauptaufgabenstellungen im Vordergrund stehen, nämlich erstens das Aufsuchen aller Lösungen einer Gleichung oder eines Gleichungssystems, also das Bestimmen der Lösungsmenge, und zweitens das Übertragen eines Sachverhalts, der in natürlicher Sprache gegeben ist und sich durch eine Gleichung ausdrücken läßt, in die Sprache der Mathematik und das Lösen dieser Gleichung, für die Erziehung zum mathematischen Denken und für die

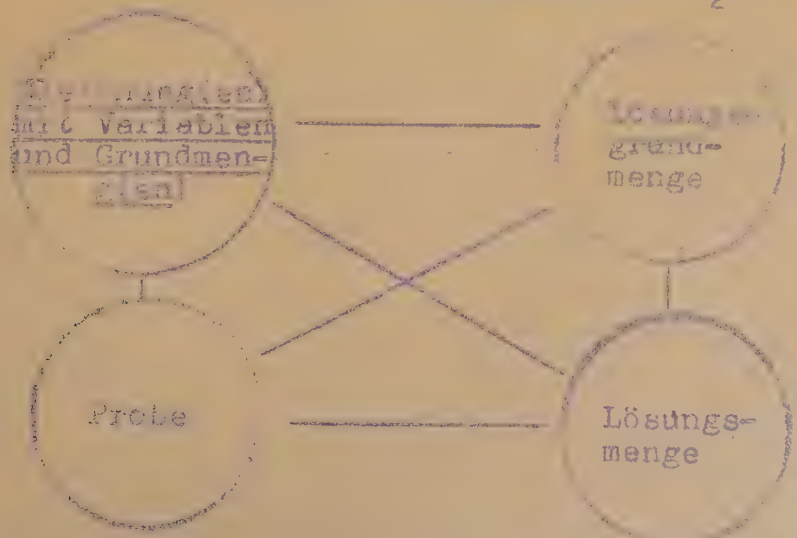
Erhöhung der Disponibilität des Denkens aber sind auch alle [illegible] Grunde stärker als das bisher im allgemeinen geschah, in unseren Aufgabensammlungen berücksichtigt und im Unterricht geübt werden. Nur so können wir erreichen, daß die Gleichungslehre für den Schüler nicht nur eine Sammlung von isolierten Rezepten bleibt, sondern zu [illegible] Wissen und allgemeinen geistigen Fähigkeiten führt.

Über die Arbeit mit den oben genannten und den noch folgenden Strukturbildern im Verlauf des Unterrichtsversuchs wird im Kapitel 4.3. berichtet.

2 Zusammengesetzte Aufgaben

Im folgenden wird gezeigt, wie man durch Zusammenfassen der [illegible] Strukturbilder zu Strukturbildern für weitere wesentliche Aufgabenstellungen des Stoffgebietes gelangt, darunter auch zu denen für die beiden gewählten Hauptaufgabenstellungen. Das Ziel dieser weiteren Strukturbilder besteht nicht im Erfassen aller denkmöglichen Typen quadratischer Aufgaben, sondern nur der über die Grundaufgaben hinaus wesentlichen. Die Hervorhebung der entsprechenden Aufgabenstellung geschieht dabei durch Unterstreichen des bereits gegebenen Elements des Strukturbildes. Alle übrigen Elemente des Strukturbildes sind im Verlauf des Lösens der Aufgabenstellung zu bestimmen.

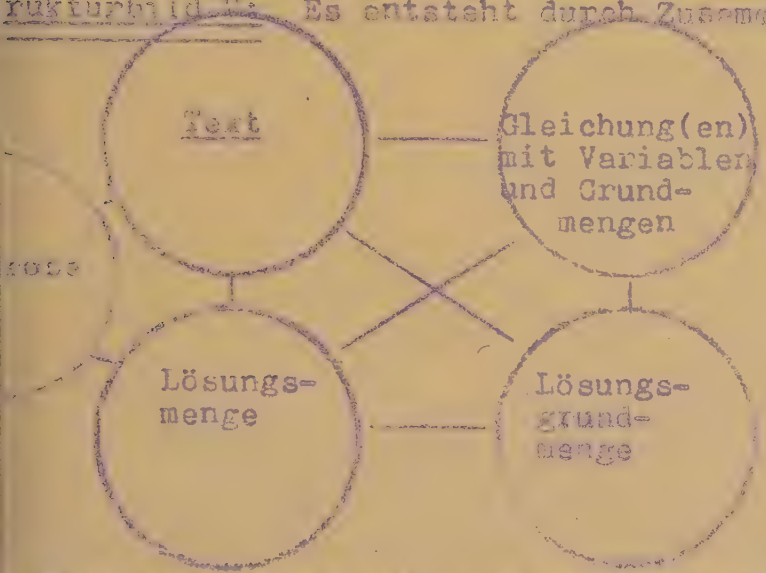
Strukturbild IV: Es entsteht durch Zusammenfassen von I.a und II.a zusammen mit S_2.



Die Unterstreichung soll anzeigen, daß es hier nur auf eine Aufgabenstellung, nämlich die erste Hauptaufgabenstellung, an-

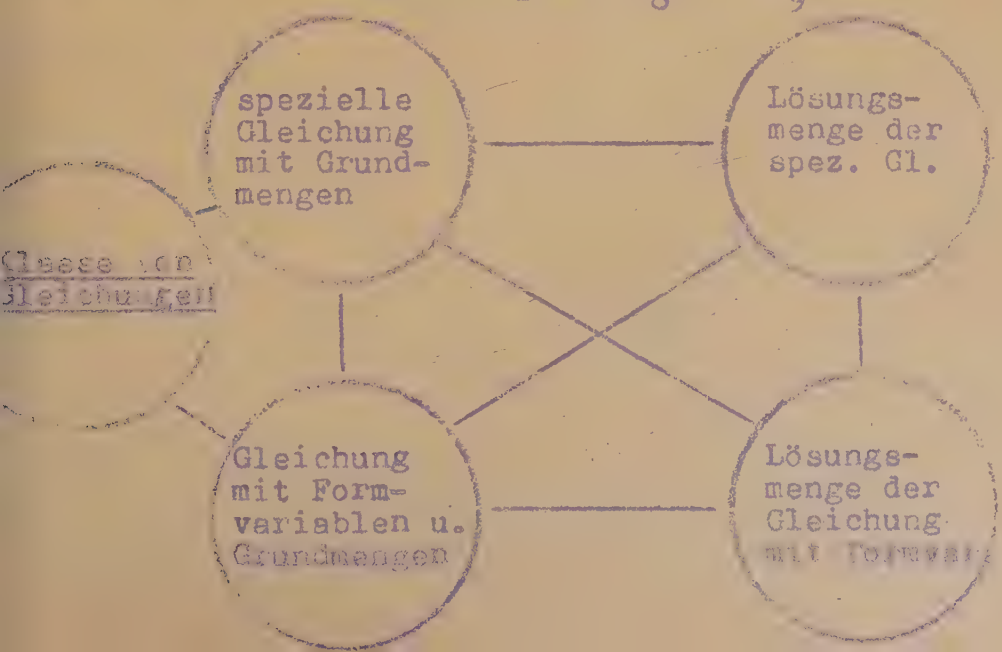
mmen soll. Diese Aufgabenstellung wird später durch die Hand-
ngsvorschrift H_1 (Vgl. Tabelle 15) bearbeitet.
r Unterschied zu II.a1. besteht darin, daß einmal die Be-
immung der Lösungsgrundmenge aus den gegebenen Variablengrund-
ngen als gesonderter Schritt auftritt und daß zum anderen die
sführung der Probe ausdrücklich als Lösungsschritt aufgenommen
rd.

rukturbild Ic: Es entsteht durch Zusammensetzen von Ic mit IV.



e Unterstreichung soll wieder eine Aufgabenstellung hervor-
ben, nämlich die zweite Hauptaufgabenstellung, gegeben ist nur
r Text. Diese Aufgabenstellung wird später durch die Handlungs-
rschrift H_2 bearbeitet. (Vgl. Tabelle ??)

rukturbild VI.: Es setzt sich zusammen aus Ib. und IIa. in Verbindung mit G_8 und G_9.



esses Strukturbild ist von ganz besonderer Wichtigkeit, da es
n zentrales Problem aufgreift, das nicht nur für die Glei-
ungslehre, sondern darüber hinaus für die gesamte Mathematik
d die Wissenschaften überhaupt von Bedeutung ist. Es ist das
oblem des Zusammenhanges zwischen Klassen von Aufgaben und spe-
ellen Aufgaben und ihren Lösungen. Dieser Zusammenhang läßt
ch gerade in der Gleichungslehre besonders gut herausarbeiten.
er geht es einmal darum, daß der Schüler erkennt, daß durch
ne Gleichung mit Formvariablen (Parametern) jeweils eine ganze
asse von Gleichungen gegeben ist, und daß man durch die Lö-
ungsmenge dieser Gleichung für jede spezielle Gleichung der
asse ihre spezielle Lösungsmenge angeben kann. Zum anderen muß
r Schüler lernen, durch Einführen von Formvariablen Gleichungen,
e die gleiche "Bauart" oder Struktur haben, zu einer Klasse zu-
mmenzufassen und diese Klasse durch eine Gleichung mit Formva-
ablen darzustellen. Dieser Übergang zu einer "Formel" ist für
le Anwendungen der Mathematik in Natur- und Gesellschaftswissen-
haften von fundamentaler Bedeutung. Das bewußte Erfassen der
ruktur einer ganzen Klasse von Gleichungen erhöht aber auch die
nermathematische Anwendungsbereitschaft des Wissens. Hat nun
r Schüler den Gleichungstyp sicher und richtig erkannt, kann er
elstrebig den richtigen Lösungsweg einschlagen, das heißt, die
forderlichen Regeln und Lösungsformeln sachkundig auswählen.
Andererseits muß er wiederum eine Formel, die den Lösungsweg für
ne ganze Klasse von Gleichungen vorzeichnet, für eine spezielle
eichung dieser Klasse interpretieren können.

esses Strukturbild dient weniger der Veranschaulichung einer
nzelnen Aufgabenstellung, sondern mehr der Veranschaulichung des
esamtzusammenhanges, der im allgemeinen durch verschiedene Teil-
fgaben realisiert werden wird. Wir halten es wegen der weitrei-
enden Bedeutung der Problematik für besonders wichtig.

e auf der Grundlage der Strukturbilder aufgebauten Aufgaben-
ellungen halten wir für die wesentlichen Aufgabenstellungen des
offgebietes. Wir meinen, daß sie in ihrer Gesamtheit die Ent-
cklung der Fähigkeit, die Zusammenhänge zwischen den Begriffen
d Aussagen des Stoffgebietes zu erkennen, entscheidend fördern
nnen.

Der Bezug zu den Tätigkeiten des Stoffgebiets (vgl. Tabelle 1)
rgestellt wurde, konnte die durch Sinnvorstellung und Kriteriu-

pisch geschaffene Orientierungsgrundlage vermittelt werden.

Der Einsatz methodischer Hilfsmittel zur Steuerung des Tätigkeitsvollzugs

chdem feststeht, welche Tätigkeiten der Schüler im Stoffgebiet erlernen muß, damit er die Aufgaben des Stoffgebietes lösen kann bzw. nachdem ein genauer Überblick über die möglichen Aufgabenstellungen vorliegt, an deren Bewältigung sich die entsprechenden Tätigkeiten herausbilden, sollen als nächstes methodische Hilfsmittel für das Erlernen der Tätigkeiten auf der Grundlage von Übungsaufgaben aufgezeigt werden.

In die folgenden Darlegungen fließen Erfahrungen aus den Unterrichtsversuchen ein. Die Grundidee lag aber bereits der Ausarbeitung des Lehrgangs zugrunde.

Prinzipiell könnte man natürlich erwägen, für alle Grundaufgaben des Stoffgebiets (und damit auch für alle zusammengesetzten Aufgaben) Algorithmen oder Handlungsvorschriften aufzustellen, um eine Steuerung der Abfolge und des Vollzugs der entsprechenden Tätigkeiten vorzunehmen.

Das liegt aber keinesfalls im Interesse unserer Bildungsziele. Der Schüler soll lernen, selbständig Zusammenhänge zu erkennen, zu verallgemeinern, zu konkretisieren und Schlüsse zu ziehen usw. und einfache Handlungen schöpferischen Charakters auszuführen. Er muß an Hand des konkreten Stoffes zu einer hohen Disponibilität im Umgang mit Begriffen und Aussagen gelangen, und das muß dazu beitragen, daß sich die mathematischen Grundfähigkeiten bei ihm soweit verfestigen, daß er sie zu selbständigem Anwenden verfügbar hat. Diese Forderung nach selbständiger geistig-produktiver Tätigkeit der Schüler schließt keinesfalls aus, mit Algorithmen und Handlungsvorschriften zu arbeiten. Es ist nur genau abzuwägen, wo man diese einsetzt und in welcher Weise. Sie können im Gegenteil, richtig eingesetzt, ein wertvolles Hilfsmittel sein, gewisse Handlungsabläufe zu automatisieren und Kraft für die selbständige geistige Tätigkeit freizustellen. In der Mathematikkonzeption wird zum Arbeiten mit Algorithmen Folgendes ausgeführt:

Ein anderer Hauptgedanke des neuen Aufbaus ist die Ausbildung der Rechenkultur sowie das Vertrautmachen mit Algorithmen und Kalkülen.

nerseits soll den inhaltlich-anschaulichen Vorgehen
s formal-algorithmische Arbeiten, das für die Datenverarbei-
ung und die maschinelle Rechentechnik charakteristisch ist,
ehen gegenüber gestellt werden, andererseits soll die Frucht-
rkeit der Wechselwirkung dieser beiden Seiten der Mathematik,
s eine dialektische Einheit bilden, den Schülern nach und nach
wußt werden." /59,S.442/

rede in der Gleichungslehre läßt sich heraus ein Beitrag lei-
en, wenn neu das richtige Verhältnis trifft zwischen Aufgaben-
ellungen, die mittels Algorithmen und Handlungsvorschriften zu
sen sind und solchen, für die bewußt nichts derartiges einge-
hrt wird.

wurde für den Lehrgang wie folgt entschieden:

Der Schüler soll zwei sehr einfache algorithmische Vor-
schriften, ohne sie als solche zu kennzeichnen, kennenlernen.

Für die beiden Hauptaufgabenstellungen gemäß den Strukturbil-
dern IV und V werden für den gesamten Lehrgang gültige durch-
gängige Lösungsvorschriften eingeführt.

Für alle übrigen Aufgabenstellungen (siehe Strukturbilder)
wird dem Schüler keine besondere Vorschrift in die Hand ge-
geben. Sie sind durch inhaltliche Überlegungen zu lösen.

. Algorithmen und algorithmische Vorschriften

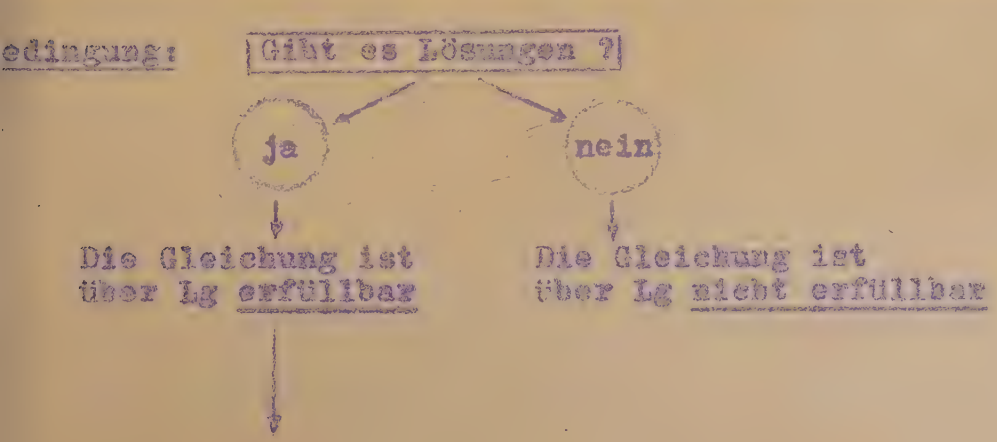
Mathematikunterricht lernt der Schüler eine ganze Reihe von
thematischen Algorithmen kennen, z.B. für das Multiplizieren,
e Dividieren usw. Diese sollen aber in unserem Zusammenhang
ht im Vordergrund stehen.

rständigen wir uns zunächst über den Begriff "Algorithmus".
e kleine Enzyklopädie Mathematik präzisiert die Vorstellungen,
e man gewöhnlich von einem Algorithmus hat, so:
in Algorithmus liegt genau dann vor, wenn gegebene Größen,
ch Eingabegrößen, Eingabeinformationen oder Aufgaben genannt,
f Grund eines Systems von Regeln, Reformungen usw. in andere
ßen, auch Ausgabegrößen, Ausgabeinformationen oder Lösungen
nannt, umgeformt oder umgearbeitet werden können". /56,S.712/
werden dann sechs grundlegende Bedingungen angegeben, die er-
llt sein müssen, damit von einem Algorithmus gesprochen werden
rf. (Vgl. /56,S.780 bis 782/)

Forderungen, die man an einen mathematischen Algorithmus
llt, lassen sich für Pädagogik und Psychologie nicht unmit
elbt übernehmen. Nach L.N.Landa lassen sich jedoch sogenannte
gorithmische Vorschriften" aufstellen. (Vgl. /64,S.34/)
se "haben insgesamt die für die Algorithmen charakteristi-
en Merkmale, lassen zugleich jedoch ein Operieren nicht nur
Symbolen zu, sondern auch damit, was dahinter steht, d.h.
ter den Objekten, mit ihrem Inhalt und mit ihrem Sinn".
l. /64,S.35/)
.Landa charakterisiert eine algorithmische Vorschrift so:
e Vorschrift ist demnach algorithmisch (sie setzt die Tä das
etimme System elementaren Operationen voraus), wenn sie bewirkt,
die unter dem Aspekt des angenommenen Kriteriums aufgestell-
Auftrags eindeutig und richtig ausgeführt werden".
,S.77. (Zum Begriff der "elementaren Operation vgl. /64,S.36
40/)

Lehrgang "Gleichungen" 7. Klasse bietet u.a. an zwei Stellen
Möglichkeit, einfache derartige algorithmische Vorschriften
zusetzen. Nämlich erstens bei der Entscheidung über die "Er-
lbarkeit" einer Gleichung bezüglich einer bestimmten Lösungs-
ndmenge, und zweitens bei der Entscheidung über die Äquivalenz
ier Gleichungen. Es handelt sich in beiden Fällen um die Steue-
g der Anwendung gegebener Definitionen. Die Aufgabe der Vor-
riften sind als Fragen, die der Schüler mit "ja" oder "nein"
beantworten hat, formuliert.

Erfüllbarkeit: Gegeben: Gleichung, Lösungsgrundmenge Lg



Bedingung : Sind alle Elemente von Lg Lösungen ?

Die Gleichung ist über Lg allgemeingültig

Die Gleichung ist über Lg erfüllbar, aber nicht allgemeingültig

e Berechtigung, von "algorithmischer Vorschrift" zu sprechen, t hier gegeben. Wird nämlich die Kenntnis der Lösungsmenge rausgesetzt, so sind nur noch elementare Operationen, näm- ch die Tätigkeiten U_2 und U_4 auszuführen. Es bei der Einfüh- ng der Vorschrift nur solche Gleichungen angeboten werden, i denen die Lösungen leicht ablesbar sind, kann man die obige rausssetzung machen. Die Einordnung von U_2 und U_4 als "elemen- re Operationen" ist für die auftretenden Fälle und zum Zeit- kt der Einführung der Vorschrift gerechtfertigt. Die Lösungs- sicht ist unter diesen Voraussetzungen hoch. Theoretisch müßte e bei fehlerfreier Ausführung von U_2 und U_4 100% betragen, aktisch wird man natürlich immer mit Störfaktoren, z.B. phy- sischer oder psychologischer Art zu rechnen haben, und die 0% nicht erreichen.

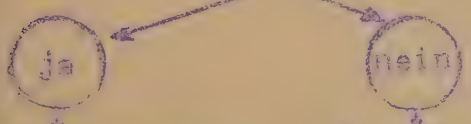
e Bezeichnung "algorithmische Vorschrift" trifft auch auf II) zu:

l: Äquivalenz: Gegeben: Zwei Gleichungen und ihre Lösungs- grundmengen

Bedingung: Sind die Lösungsgrundmengen gleich?

Bedingung: Sind die Lösungs- mengen gleich?

Die Gleichungen sind nicht Äquivalent



ie Gleichungen ind Äquivalent

Die Gleichungen sind nicht Äquivalent

ier läßt sich alles auf eine elementare Operation, nämlich
ie Tätigkeit S_4, zurückführen, wenn man obendrein die Kenn-
is der Lösungsmengen voraussetzt.

ur Arbeit mit diesen Vorschriften

AI wurde im Lehrgang nicht in dieser Form verwendet (Vgl.
Lehrg. 7. Kl.), sondern nur als Übersicht. Die hier angege-
bene Vorschrift stellt eine Weiterentwicklung dar und er-
scheint uns zweckmäßiger als die verwendete Übersicht.

AII wurde so wie oben dargestellt in Übersicht eingesetzt
(Vgl. Lehrg. 7. Kl.). Wenn es sich dabei auch zeigte, daß
die Schüler bereits in der zweiten Stunde (einige sogar
schon nach dem 1. Beispiel) ohne Vorschrift arbeiteten, die
Denkvorgänge also sofort verkürzten und die 1. und 2. Be-
dingung offenbar schon ohne Vorschrift überblickten, so mei-
nen wir trotzdem, daß der Aufwand lohnt. Zumal es sich zeigte,
daß im Falle des Vergessens der Definition die Schüler auf
die Vorschrift zurückgriffen. Das gilt auch für die Über-
sicht zu "Erfüllbarkeit".

rinzipiell halte ich die Heranführung der Schüler an ein be-
wußtes Arbeiten mit Algorithmen und algorithmischen Vorschrif-
ten über die bisher im Mathematikunterricht üblichen hinaus für
sehr wertvoll. Sie werden dadurch mit einer wesentlichen metho-
dischen Arbeitsweise und Denkenführung vertraut gemacht,
die auch einen gewichtigen Beitrag der Mathematik zur Allgemein-
bildung darstellt. Das hebt auch L.N.Landa hervor:
Besonders zu betonen ist die Bedeutung, Algorithmen zu lehren,
für die Allgemeinbildung. Obwohl jeder konkrete Algorithmus nur
dazu dient, Aufgaben einer bestimmten Klasse zu lösen, prägen
die Schüler beim Aufbau von Algorithmen in die Struktur von Ge-
setzmäßigkeiten und Erscheinungen der Außenwelt sowie in die Struktur
von Denkprozessen ein. Sie lernen allgemeine Denkmethoden kennen,
sie lernen diese zu erschließen, zu modifizieren und anzuwenden.
Zweifellos spielt das alles in der allgemeinen Entwicklung des
Schülers eine außerordentlich wichtige Rolle". /64,S.109/

Man sollte deshalb, so meinen wir, die Schüler stärker als
bisher üblich, auch an das Aufstellen einfacher algorithmischer
Vorschriften heranführen und dabei auch so unmethodische Algorith-

iten wie die angegebenen nutzen. Natürlich bietet die Glei-
ungslehre noch weit mehr Ansatzpunkte für ein algorithmisches
rgehen als die genannten.

. <u>Handlungsvorschriften</u>

tersucht man die speziellen Lösungsvorschriften für die ein-
lnen Typen von Gleichungen mit Variablen, so bietet es sich
, das Wesentliche und Allgemeine in einer durchgängig für alle
pen von Gleichungen gültigen Lösungsvorschrift zusammenzufassen.
tsprechendes gilt für das Lösen von eingekleideten Aufgaben
d Sachaufgaben, die auf Gleichungen mit Variablen führen.
erartige Aufgaben sollen hier kurz Textaufgaben heißen).
ese allgemeinen Lösungsvorschriften wollen wir <u>Handlungsvor-</u>
<u>hriften</u> nennen.
ährend es bei den Strukturbildern in erster Linie um das Er-
nnen von Zusammenhängen zwischen Begriffen und Aussagen geht,
ehen hier die Zusammenhänge zwischen Lösungswegen und -ver-
hren im Vordergrund.
n kann die hier verwendeten Handlungsvorschriften im allge-
inen noch nicht als algorithmische Vorschriften bezeichnen, da
e Aufträge, die für den Tätigkeitsvollzug gegeben werden, we-
ger streng determiniert sind als man das von algorithmischen
rschriften fordert. Es wird nicht auf "elementare Operationen"
rückgegangen, es werden zum Teil Aufträge erteilt, zu deren
sführung mehrere Tätigkeiten unterschiedlicher Komplexität und
hwierigkeit erforderlich sind. Das gilt z.B. für den Auftrag
pezielle Lösungsvorschriften anwenden" oder gar für "Aufstellen
r Gleichung(en)" aus dem Text einer Sachaufgabe. Die Lösungs-
rantie wird durch solche Aufträge, die selbständige Entschei-
ngen ohne fertige Vorschriften verlangen, verringert. Im Falle
wisser spezieller Aufgabentypen liegt der Fall im allgemeinen
ch anders. Hier gehen "Unterprogramme" in die allgemeine Vor-
hrift ein, die z. T. algorithmische Vorschriften oder mathema-
sche Algorithmen sind. Dadurch kann die Handlungsvorschrift im
eziellen Fall durchaus einen algorithmischen Charakter an-
hmen.

3.3.2.1. Die Handlungsvorschrift H_1

Die Handlungsvorschrift H_1 (Vgl. Tabelle 15) für das Lösen einer Gleichung (oder eines Gleichungssystems) mit gegebener(n) Variablengrundmenge(n) ist die "Ausführungsbestimmung" für die Hauptaufgabenstellung gemäß Stukturbild IV.
Der Graph ist so angelegt, daß in der Längsrichtung die einzelnen Teilergebnisse erscheinen. Von den Seiten her gehen die auszuführenden Handlungen, die zu diesen Ergebnissen führen, ein.
In der vorliegenden Form ist die Handlungsvorschrift zunächst für die Hand des Unterrichtenden gedacht. Für die Schüler wurde sie im Unterrichtsversuch schrittweise von der 7. Klasse an als Wortvorschrift aufgebaut. (Vgl. Lehrgang 7. Klasse)
Man sollte erproben, ob sie auch dem Schüler im speziellen Fall in schematisierter Form angeboten werden sollte, um sie dann von unten her bis zur vorliegenden Verallgemeinerungsstufe auszubauen. Das Ziel der Handlungsvorschrift H_1 besteht darin, den für jeden Gleichungstyp auf höherer Ebene immer wiederkehrenden Handlungsablauf zu veranschaulichen und dadurch ein ständig gleichartiges Vorgehen zu garantieren und den Handlungsvollzug zu automatisieren. Es geht aber auch darum, aufzuzeigen, daß die Handlungsvorschrift von Gleichungstyp zu Gleichungstyp einerseits differenzierter zum anderen aber auch allgemeiner wird. Dieser dialektischen Einheit muß sich der Unterrichtende stets bewußt sein und versuchen, sie auch dem Schüler bewußt zu machen. Der Schüler muß einerseits das Gemeinsame des Inhalts und des Vorgehens bei allen Gleichungstypen erfassen und andererseits die spezifischen Besonderheiten beim konkreten Gleichungstyp erkennen. So gesehen steckt in der Unterrichtsarbeit auf der Grundlage dieser Handlungsvorschrift mehr als ein Arbeiten nach einem einheitlichen Programm zur Steuerung des Tätigkeitsvollzugs beim Lösen von Gleichungen der verschiedenen Typen.
Für die vorliegenden unterrichtspraktischen Untersuchungen wurde H_1 einmal als eine "Leitlinie" für den gesamten Lehrgang benutzt und zum anderen als ein Hilfsmittel für die Fehleranalysen zur Auswertung der entsprechenden Aufgabenstellung. (Vgl. Kapitel 4.3.3.)

rch die Zurückführung der einzelnen Aufträge der Handlungs-
rschrift auf mathematische Grundtätigkeiten mittels der Fä-
lle 14 wird die Hauptaufgabenstellung des Strukturbildes IV
zisiert (Vgl. Tabelle 16).
ei Beispiele dienen zur Konkretisierung. (Vgl. Tabelle 17
d Tabelle 18)

2.2. "Unterprogramme" zu H_1

die in H_1 auftretenden Aufträge: "Typ der Gleichung erkennen",
pezielle Lösungsvorschrift anwenden" und "Lösungen der ein-
chsten Gleichung(en) bezüglich $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ angeben",
ch weiter zu präzisieren und zu zerlegen, empfiehlt es sich,
ne Art "Unterprogramme" einzuschalten. Diese sind als algorith-
sche Vorschriften anzusehen, wenn man das Abarbeiten der ein-
nen Regeln, Lösungsformeln und -verfahren als "elementare
erationen" auffaßt.
e "Unterprogramme" sollen mit H_{11}, H_{12} und H_{13} bezeichnet
den. (Vgl. Tabelle 19, Tabelle 20, Tabelle 21)
lle davon wurden bei den Unterrichtsversuchen als Übersichten
rwendet (Vgl. Lehrgang 7. Klasse und 9. Klasse)
e wurden vor allem bei der Behandlung der Lösbarkeitsfälle,
. der Frage nach der "Erfüllbarkeit" bezüglich der größten
n Schüler bekannten Lösungsgrundmenge, eingesetzt
e Übersichten H_{12} und H_{13} halten wir darüber hinaus in der vor-
egenden Form als Anschauungstafeln oder für die Wiederholung
den Klassen 9 und 10 für geeignet.
ne weitere Aufspaltung von H_{12} hinsichtlich der Spezialfälle
quadratischen Gleichung wäre durchaus möglich, ist aber un-
ckmäßig, weil die Übersichtlichkeit darunter leidet. Hierfür sollte
n eine besondere Übersicht verwenden (Vgl. Lehrgang 9. Kl.).
entsprechenden Klassenstufen wurden in den Übersichten ver-
kt, die Einordnung in H_1 geht aus H_1 hervor.
spezifischen Probleme von Gleichungen mit formvariablen
rametern) gehen in H_{12} und H_{13} nicht ein.

3. Die Handlungsvorschrift H_2

die zweite Hauptaufgabenstellung, nämlich die in Struktur
d V veranschaulichte, wurde ebenfalls mit einer für den ge-
ten Lehrgang durchgängig gültigen Handlungsvorschrift H_2

gl. Tabelle 22) gearbeitet. Für sie erscheint H_1 als ein nterprogramm", bereit ist H_1 die [illegible], im Lehrgang rwendete Vorschrift.

e Vorschrift H_2 erscheint im Lehrgang 7. Klasse erstmalig s Wortvorschrift für eine spezielle Aufgabe. Sie wurde ent- rechend in allen weiteren Klassenstufen verwendet.

ne Zurückführung auf die Tätigkeiten der Tabelle 14 ist icht möglich. Es kommen zu den Tätigkeiten von H_1 noch [illegible] und [illegible] hinzu. – Der Mangel dieser Handlungsvorschrift be- ht darin, daß der für den Schüler komplizierteste Auftrag, mlich das "Aufstellen der Gleichung(en)", hier nicht weiter fgegliedert wird. Die zugehörige Tätigkeit ist noch sehr kom- ex.

n detailliertes "Unterprogramm" zur Unterstützung des Tätig- itsvollzuges wäre an dieser Stelle sehr zweckmäßig. Dieses oblem wurde im Lehrgang nicht weiter verfolgt.

er Probleme des "Lösens von Sachaufgaben" liegt eine Disser- tionsschrift von H. Elfers vom November 1969 vor.

. Zur Behandlung der übrigen Aufgabenstellungen

r alle übrigen Aufgabenstellungen entsprechend den Struktur- ldern wurden bewußt keine Vorschriften aufgestellt. Hier soll- der Schüler selbständig die notwendigen Begriffe und Aussagen rknüpfen lernen, ihre wechselseitigen Beziehungen und Zusam- nhänge erkennen und so zu einer möglichst hohen Disponibili- t im Umgang mit allen mathematischen Objekten des Stoffgebie- s gelangen. Seine schöpferischen Fähigkeiten sollten entwik- lt werden; als "Gegengewicht" gegen das notwendigerweise for- l-algorithmische Abarbeiten von Lösungsvorschriften sollten e genannten Aufgaben durch inhaltliche Überlegungen gelöst rden und so stärker zu geistig-produktiver Tätigkeit anregen. den Unterrichtsversuchen wurde deshalb darauf geachtet, daß le wesentlichen Aufgabenstellungen des Stoffgebietes in die ungskomplexe aufgenommen werden. Die Auswertungen (Vgl. Kap. 3.) zeigen an einigen Beispielen, daß dieses Handhaben erfolg- ich verlief. Die Schüler lernten einerseits die inhaltlich- ngentheoretische Seite des Stoffgebietes tiefer und bewußter rchdringen als das im bisherigen Unterricht im allgemeinen r Fall war und andererseits gelang es auch, in Verbindung mit n Handlungsvorschriften die formal-algorithmische Seite gut

Beispiele für spezielle Aufgabenfolgen und Übungskomplexe auf der Grundlage der Strukturbilder

sollen jetzt einige ganz konkrete Hilfen für den Unterrichtenden gegeben werden, indem das Aufstellen von Aufgabenfolgen w. Übungskomplexen an speziellen Beispielen demonstriert wird.
Lehrgang für die 7. Klasse (Vgl. Kap. 2.2.1.) sind die wentlichen Aufgabenfolgen und Übungskomplexe angeordnet bzw. in n zugehörigen Übungsblättern explizit aufgeführt. Im Lehrgang r die 8. und 9. Klasse dagegen wird an verschiedenen Stellen r auf Übungskomplexe verwiesen, ohne diese auszugeben.
folgenden soll von einer Aufgabenfolge dann gesprochen wern, wenn es sich um die schrittweise Erarbeitung neuen Stoffes ittels Aufgaben steigenden Schwierigkeitsgrades handelt. Der rmin Übungskomplex wird verwendet, wenn es sich um Vertiefung und Festigung schon erarbeiteten Stoffes handelt, wenn also ene Problemkomplexe, Zusammenhänge zwischen bekannten Begriffen d Aussagen auf der Grundlage der Strukturbilder durch Übungsfgaben aufgedeckt und bewußt gemacht werden bzw. an Hand neuStoffes auf höherer Ebene wiederholt werden.
allgemeinen wird natürlich in der Unterrichtspraxis keine herfe Trennung zwischen Aufgabenfolgen und Übungskomplexen erlgen. Die Übergänge werden vielmehr fließend sein. Hier werden r deshalb zwei verschiedene Begriffe eingeführt, um gewisse pekte besser hervorheben zu können.

rch die Strukturbilder ist ein Überblick über die wesentlichen oblemkomplexe gegeben. Es ist auch bekannt, welche Fähigkeiten r Schüler beherrschen muß, um die zugehörigen Aufgabenstellungen zu bewältigen, und es gibt weiterhin einen detaillierten len" für den Tätigkeitsvollzug bei den Hauptaufgabenstellungen s Stoffgebietes in Form von Handlungsvorschriften.
mit liegt eine gute Orientierungsgrundlage für das gesamte offgebiet vor.
r nächste Schritt besteht für den Unterrichtenden darin, die tsprechenden Aufgabenfolgen und Übungskomplexe wirklich erzuben.
genügt nicht, allgemein die wesentlichen Aufgabenstellungen kennen, man muß vielmehr in der Lage sein, rationell und elt selbst die entsprechenden speziellen Übungsaufgaben herstellen.

umal, weil im allgemeinen die Aufgabensammlungen zur Lehr-
cher noch zu wünschen übrig lassen, und zum anderen, um den
tar-chiedlichen pädagogisch-psychologischen Unterrichtssitu-
ionen gerecht werden zu können.

soll deshalb im folgenden einiges zur Zusammenstellung spe-
eller Aufgabenfolgen und Übungskomplexe gesagt werden.

.1. Aufgabenfolgen und Übungskomplexe zu Bruchgleichungen

s Beispiel werden Aufgabenfolgen und Übungskomplexe zu Bruch-
eichungen (8. Klasse und 9. Klasse) herausgegriffen. Es wird
mit nicht behauptet, daß Bruchgleichungen besonders wichtig
nd oder besonders ausführlich zu behandeln sind. Sie eignen
ch nur gut zur Demonstration des Anliegens, da man an Hand
n Bruchgleichungen alle wesentlichen Aspekte gut erfassen und
ar darlegen kann.

ne Aufgabenfolge zur Erarbeitung neuen Stoffes hat ebenso
e ein Übungskomplex von einer präzisen Zielvorstellung auszu-
hen. Es werden dabei die Zielvorstellungen des Lehrplans als
sgangspunkt genommen.

Soll z.B. eine Aufgabenfolge zu Bruchgleichungen 8. Klasse
, den Ziel, alle rechnerischen Schwierigkeiten zu erfassen,
fgeteilt werden, so wird man diese ordnen und sie dann in
ne Reihenfolge hinsichtlich des Schwierigkeitsgrades bringen
ne solche Rangfolge ist natürlich im allgemeinen mit subjek-
ven Momenten belastet. Sie wird aber auf Grund objektiver und
thodischer Kriterien und mittels methodischer Erfahrungen ein-
ichtend sicher herstellbar sein. Da es zunächst um rechnerische
hwierigkeiten gehen soll, wird nur P als Variablengrundmenge
hlen und die Fragen der "Definitionsmenge" und der "Äquivalenz
n Gleichungen, soweit das möglich ist, zurückstellen.
kommen für die 8. Klasse als Typen von Bruchgleichungen die
lgenden in Frage (x soll dabei die Gleichungsvariable sein,
e Formvariablen stehen für reelle Zahlen).

$\frac{a}{bx} = \frac{c}{d}$ oder durch einfache Bruchrechnung auf diese Form zu bringen

$\frac{ax+b}{x-c} = \frac{dx+e}{x-c}$

$\frac{a}{bx-c} = \frac{d}{ex-f}$

$\frac{x-a}{x-b} : \frac{x-c}{x-b} = d$, wobei der Schwierigkeitsgrad

einem Minuszeichen vor einem Bruch sofort beseitigen
ier ist als bei einem Pluszeichen.
ist weiterhin zu beachten, daß der Schwierigkeitsgrad der
be entscheidend davon abhängt, was für eine Zahl die Lö-
g ist, und daß er natürlich bei einer negativen Bruch im
gemeinen am höchsten ist. - Vom Typ her komplizierte Auf-
en als 4. sollte man in der 8. Klasse nicht wählen.
e spezielle Aufgabenfolge könnte dann z.B. die folgende
n:

$\frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2x}$; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in R \setminus \{0\} \wedge \frac{3}{x} = \frac{5}{6} - \frac{1}{2x}\}$; $L = \{2\}$

$\frac{x-4}{x+3} = \frac{3x+4}{x+3}$; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in R \setminus \{-3\} \wedge \frac{x-4}{x+3} = \frac{3x+4}{x+3}\}$; $L = \{-4\}$

$\frac{2}{x+3} = \frac{-7}{x-4}$; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in R \setminus \{-3;4\} \wedge \frac{2}{x+3} = \frac{-7}{x-4}\}$; $L = \{\frac{1}{2}\}$

$\frac{x-5}{x+3} + \frac{x+1}{x+3} = 4$; $x \in R$

[schwierigere Aufgabe:
$\frac{x-5}{x+3} + 4 = \frac{x+1}{x+3}$]

$L = \{x \mid x \in R \setminus \{-3\} \wedge \frac{x-5}{x+3} + \frac{x+1}{x+3} = 4\}$; $L = \{-8\}$

Geht es um die Aufstellung eines Übungskomplexes zur glei-
en Thematik, so muß man ebenfalls eine genaue Zielvorstellung
pen. Hier soll unter der Voraussetzung vorgegangen werden,
s alle begrifflichen Zusammenhänge erarbeitet sind, die Ver-
efung und Festigung aber noch aussteht. Rechnerische Schwie-
gkeiten sollen nicht so groß sein, daß sie das Bild verfäl-
en. Man kann also z.B. innerhalb eines der vier Typen diffe-
, und hat dann folgende Probleme zu erfassen:
a) Die Gleichung hat genau eine Lösung bestimmt $R \setminus \{$Polstellen aller Nenner$\}$; sie ist also erfüllbar, aber nicht

b) Die Gleichung hat keine Lösung bezüglich der gegebenen Variablengrundmenge, weil diese die Lösung der Ausgangsgleichung bezüglich $\mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen aller Nenner}\}$ nicht enthält.

c) Die Gleichung hat keine Lösung, weil die Nullstelle eines der Nenner der Ausgangsgleichung Lösung der durch Umformung entstehenden letzten Gleichung ist, und eine solche Zahl nicht Lösung der Ausgangsgleichung sein kann.

d) Die Gleichung hat keine Lösung, weil die durch Umformen entstehende letzte Gleichung über R und damit auch über jeder Teilmenge von R nicht erfüllbar ist. Man erhält eine Gleichung der Form $0 \cdot x = a,\ a \neq 0$.

e) Die Gleichung ist allgemeingültig über der Lösungsgrundmenge. Die äquivalente Umformung führt auf die Gleichung $0 \cdot x = 0$.

f) Es ist, wenn möglich, eine Lösungsgrundmenge anzugeben, über der die Gleichung von b) (bzw. von c), bzw. von d)) erfüllbar, aber nicht allgemeingültig ist.

g) Es sind, wenn möglich, weitere Lösungsgrundmengen zu finden, über denen die Gleichung e) allgemeingültig ist.

h) Die Gleichung von d) ist, wenn möglich, so abzuändern, daß eine erfüllbare, aber nicht allgemeingültige Gleichung entsteht.

Dabei gehören die Aufgabenteilungen f), g) und h) zum Strukturbild IIb.

Im folgenden sollen für die Aufgabentypen 1., 2., 3. und 4. für die Aufgabenteilungen a), b), c), d) und e) mögliche Gleichungen als Beispiele angegeben werden, die Aufgabenstellungen f), g) und h) bleiben jeweils wie oben und werden deshalb nicht jedes Mal mit aufgeführt.

3.4.2. [illegible]

1. Typ : $\boxed{\frac{a}{bx} = \frac{c}{d}}$ oder darauf zurückführbar

1. a) $\frac{3}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2x}$; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in R\setminus\{0\} \wedge x = 3\}$

$L = \{3\}$; Die Gleichung ist über $R\setminus\{0\}$ erfüllbar, aber nicht allgemeingültig

b) [illegible] ; $a \in Q$

$L = \{a \mid a \in Q\setminus\{0\} \wedge a = \frac{?}{10}\}$ [illegible]

$L = \{\ \}$; Die Gleichung ist über $Q\setminus\{0\}$ nicht erfüllbar ($\frac{?}{10} \notin Q\setminus\{0\}$) [illegible]

c) $\frac{5}{6x} = \frac{1}{3x}$; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in R\setminus\{0\} \wedge x = 0\}$

$L = \{\ \}$; Die Gleichung ist über $R\setminus\{0\}$ nicht erfüllbar ($0 \notin R\setminus\{0\}$)

d) $3 + \frac{4}{u} - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{u}$; $u \in R$

$L = \{u \mid u \in R\setminus\{0\} \wedge$ [illegible] $\}$

$L = \{\ \}$; Die Gleichung ist über R nicht erfüllbar

e) $1 + \frac{1}{2x} - \frac{4}{5} = \frac{3}{2x} + \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in R\setminus\{0\} \wedge 0 \cdot x = 0\}$

$L = R\setminus\{0\}$; Die Gleichung ist über $R\setminus\{0\}$ allgemeingültig

Bemerkung: In der Mengenschreibweise von L wurde jeweils die letzte durch [illegible] Umformungen entstehende Gleichung angegeben. Das wird auch weiterhin so beibehalten. Im folgenden wird der Text, [illegible] Typ 1 [illegible], weggelassen.

[illegible] Typ : $\frac{ax + b}{cx + d} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$

[illegible] a) $\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$; $x \in$ [illegible]

$L = \{x \mid x \in$ [illegible] $\setminus \{-3\} \wedge$ [illegible] $1\}$

$L = \{1\}$

b) $\frac{x - 14}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$; $x \in$ [illegible]

$L = \{x \mid x \in$ [illegible] $\wedge$ [illegible] $= -1\}$

$L = \{\ \}$

c) $\frac{[illegible]}{x + 1} = \frac{[illegible]}{x + 1}$; $x \in$ [illegible]

$L = \{x \mid x \in$ [illegible] $\setminus \{-1\} \wedge x$ [illegible] $= -1\}$

$L = \{\ \}$

d) $\frac{2x - 10}{x - 7} = \frac{2(x + [illegible])}{x - 7}$; $x \in$ [illegible]

$L = \{x \mid x \in$ [illegible] $\setminus \{7\} \wedge 0 \cdot x = 5\}$

$L = \{\ \}$

e) $\frac{(a + 3)^2 - [illegible]}{a + 3} = \frac{[illegible]}{a + 3}$; $a \in$ [illegible]

$L = \{a \mid a \in R \setminus \{-3\} \wedge 0 \cdot a = 0\}$

$L = R \setminus \{-3\}$

3. Typ : $\frac{a}{bx + c} = \frac{d}{ex + f}$

3 a) $\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in$ [illegible] $\setminus \{$[illegible]$\} \wedge x =$ [illegible]$\}$

$L = \{$[illegible]$\}$

b) $\frac{[illegible]}{x + [illegible]} = \frac{[illegible]}{[illegible]}$; $x \in$ [illegible]

$L = \{x \mid x \in$ [illegible] $\setminus \{$[illegible]$\} \wedge$ [illegible] $\}$

$L = \{\ \}$

c) [illegible] ; $x \in R$

[illegible] $\setminus \{ [illegible] \}$ [illegible]

d) [illegible] $= \frac{6}{4a - 1}$; $a \in R$

$L = \{ a \mid a \in R \setminus \{ \frac{5}{2} ; \frac{1}{4} \} \wedge 0 \cdot a = -27 \}$

$L = \{ \}$

e) [illegible] $= \frac{6}{4x - 10}$; $x \in R$

$L = \{ x \mid x \in R \setminus \{ \frac{5}{2} \} \wedge 0 \cdot x = 0 \}$

$L = R \setminus \{ [illegible] \}$

Bemerkungen: (1) zu 3c : Jede Gleichung dieses Typs, bei der [illegible] (bx - c); am ≠ d; a, b, c, d, m ≠ 0 ist, führt auf eine [illegible] $x = \frac{c}{b}$; denn aus am (bx - c) = d (bx - c) folgt [illegible] = 0; also $x = \frac{c}{b}$ für d ≠ am. Die Lösungsmenge ist [illegible] = { }.

(2) Die anderen Fälle erhält man leicht durch [illegible] [illegible]stimmten Koeffizienten.

[illegible] Typ [illegible]

a) [illegible] ; $x \in G$

$L = \{ x / x \in G \setminus \{-3\} \wedge x = -8 \}$

$L = \{ [illegible] \}$

b) [illegible] $= 4$; $x \in N$

[illegible] $\wedge$ [illegible]

$L = \{ \}$

c) [illegible] $\in$ [illegible]

[illegible]

$L = \{ \}$

[illegible]) [illegible]

[illegible]

$L = \{ \}$

[illegible]) [illegible]

$L = \{$ [illegible] $\in$ [illegible] $\}$

[illegible]

[illegible]erkung zu 4c) : Eine Gleichung des Typs 4 führt für beliebiges [illegible],d, [illegible], c = 2b - a stets auf $L = \{ \}$, denn

[illegible]

[illegible]x - a - 2b + a = d(x - b)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]an vergleiche dazu auch im Artikel "Aufbau der elementaren Gleichungslehre..." /67/ von J.Lauter den Absatz 'Rezepte' zur Herstellung [illegible] bis 114/.

[illegible]m allgemeinen wird es im Unterricht möglich und zweckmäßig, weil [illegible]

Übungskomplex

	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g	1h
[illegible]fgaben-[illegible]olge	2a	2b	2c	2d	2e	2f	2g	2h
	3a	3b	3c	3d	3e	3f	3g	3h
	4a	4b	4c	4d	4e	4f	4g	4h

[illegible] von links oben nach rechts unten, so erfaßt man alle Schwierigkeitsgrade und alle Probleme. Eine mögliche Aufgabenauswahl ist im Schema durch Unterstreichung angedeutet.

[illegible]otzdem meinen wir, daß man wenigstens einmal innerhalb eines Typs alle Aufgaben abarbeiten sollte, damit dem Schüler eindringlich bewußt wird, daß es der Gleichung keineswegs sofort anzusehen ist, wie es um ihre Erfüllbarkeit steht.

Es ist nun einfach, das Gesagte auf Bruchgleichungen 9. Klasse zu erweitern [illegible] Typen ein[illegible] Gleichungen sind dann auch Typen, die auf quadratische Gleichungen führen, einzubeziehen.

Typ: $\frac{x - a}{x - b}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{(x - b)(x - d)}$ $a \neq b, b \neq d, c \neq d$

Man erhält eine lineare Gleichung.

a) [illegible] $\frac{[illegible]}{(x - 1)(x - 3)}$; $x \in R$

[illegible]

[illegible]

b) [illegible] $\frac{[illegible]}{[illegible] 1)(x - 3)}$; $x \in G$

$L = \{x \mid x \in [illegible] = \frac{17}{2}\}$

$L = \{\ \}$

c) [illegible] ; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in R \setminus \{1; 3\} \wedge x = 3\}$

$L = \{\ \}$

d) [illegible] $= \frac{[illegible]}{(x + 3)(x + 4)}$; $x \in [illegible]$

[illegible]

$L = \{\ \}$

e) [illegible] $\frac{[illegible]}{(x + 3)(x + 4)}$; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in R \setminus \{-3; -4\} \wedge 0 \cdot x = 0\}$

$L = R \setminus \{-3; -4\}$

Bemerkung:

1. Wenn a + d ≠ b + c , dann läßt sich A so bestimmen, daß einer der Fälle a), b), c) eintritt.

2. Wenn a + d = b + c und A ≠ ad - bc , dann erhält man Fall d).

3. Wenn a + d = b + c und A = ad - bc , dann erhält man Fall e).

Typ : $\frac{ax + b}{x - [illegible]} + \frac{cx + d}{x - [illegible]} = e$; a, b, c, d, e beliebig, aber [illegible] ≠ 0

Für a + c = e erhält man durch Umformen eine lineare Gleichung, für a + c ≠ e eine quadratische Gleichung.
Es sei hier a + c = e .

a) $\frac{x - [illegible]}{x + 1} + \frac{2x - [illegible]}{x} = [illegible]$; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in R \setminus \{-1; 0\} \wedge x = -\frac{1}{2}\}$

$L = \{-\frac{1}{2}\}$

b) $\frac{x - [illegible]}{x + 1} + \frac{2x - [illegible]}{x} = [illegible]$; $x \in G$

$L = \{x \mid x \in G \setminus \{-1; 0\} \wedge x = -\frac{[illegible]}{[illegible]}\}$

$L = \{\ \}$

c) $\frac{2x [illegible]}{x - 1} + \frac{[illegible]}{x + 2} = 6$; $x \in R$

$L = \{x \mid x \in R \setminus \{-2; 1\} \wedge x = -2\}$

$L = \{\ \}$

d) $\frac{[illegible]}{x - 1} + \frac{x - [illegible]}{x + [illegible]} = 3$; $x \in [illegible]$

$\mathbb{L} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{\quad ; \quad\} \wedge \quad x \neq \quad\}$

$\mathbb{L} = \{\quad\}$

$\quad \quad 1 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$

$\mathbb{L} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 1\} \wedge 0 \cdot x = 0\}$

$\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

emerkung: Die Fälle c) und e) sind nicht anders konstruierbar, .h. man kann es nicht erreichen, daß nur unkürzbare Brüche auf-eten. Es werden immer bei c) einer und bei e) beide Brüche kürz-ar sein.

Bsp.:

a,b,c beliebig, aber $a \neq$, $a \neq$, $c \neq a$

Durch Umformen erhält man immer eine lineare

$$\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = 0 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{L} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\} \wedge x = \frac{2}{3}\}$

$\mathbb{L} = \{\frac{2}{3}\}$

$$\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)} - \frac{3}{(x-1)(x+1)} = 0 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{L} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\} \wedge 0 \cdot x = 4\}$

$\mathbb{L} = \{\quad\}$

$$\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = 0 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{L} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\} \wedge x = 1\}$

$\mathbb{L} = \{\quad\}$

$$\frac{2}{x(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = 0 \quad ; \quad x \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{L} = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\} \wedge 0 \cdot x = 4\}$

7a) $\frac{1}{x(x-1)} + \frac{1}{x(x+1)} - \frac{2}{(x-1)(x+1)} = 0 \; ; \quad x \in R$

$L = \{ x \mid x \in R \setminus \{-1; 0; 1\} \wedge 0 \cdot x = 0 \}$

[illegible]

Bemerkung: Den Fall c) erhält man leicht: Soll z.B. b nach der Umformung zur Lösungsmenge der letzten Gleichung bezüglich R gehören, so hat man A = b - a, B = c - b, [illegible] zu wählen.

8. Typ: $\frac{x-a}{x-b} + \frac{x-c}{x-d} = \frac{x^2 + Ax + B}{(x-b)(x-d)}$

Bei a,b,c,d beliebig, aber a ≠ b, c ≠ d, b ≠ d führt dies [illegible] können so bestimmt werden, daß die sich durch Umformung ergebende quadratische Gleichung über R beliebige Lösungen hat, z.B. auch b und d.

Beispiel: Man erhält für a = 1, b = [illegible], c = [illegible], d = 4 die Gleichung $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{x^2 + Ax + B}{(x-2)(x-4)}$

A und B sollen so bestimmt werden, daß 2 und 4 die Lösungen der durch Umformen entstehenden quadratischen Gleichung über R sind:

$(x-1)(x-4) + (x-3)(x-2) = x^2 + Ax + B$

[illegible]

$x^2 + (-10 - A)x + (10 - B) = x^2 - 6x + 8$

[illegible]

$\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{x^2 - 4x + 2}{(x-2)(x-4)} \; ; \quad x \in R$

$L = \{x \mid x \in R \setminus \{2; 4\} \wedge x^2 - 6x + 8 = 0\}$

$L = \{\}$

2. A und B sollen so bestimmt werden, [illegible] sungen der durch Umforme[illegible] entstehenden quadratischen Gleichungen über [illegible] sind

$x^2 + (-10 - A)\,x + (10 - B) = x^2 - 5x + 6$

$-10 - A = -5 \qquad A = -5$

[illegible]

Die gesuchte Ausgangsgleichung ist also:

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-3}{x-4} = \frac{x^2 - 5x + 4}{(x-2)(x-4)} \quad ; \quad [illegible]$$

$$L = \{x \mid x \in \mathbb{R} \setminus \{2; 4\} \wedge x^2 - 5x + 6 = 0\}$$

$$L = \{1\}$$

3. Entsprechend lassen sich natürlich A und B so bestimmen, daß man irgendwelche Lösungen $\neq b$ und $\neq d$ erhält und ebenso, daß sich keine reellen Lösungen oder eine reelle Doppellösung $\neq b$ und $\neq d$ ergeben.

J.Lauter /67, S.113 bis 114/ führt noch zwei weitere Typen an, die der Vollständigkeit halber hier auch noch genannt werden sollen, obwohl uns das Prinzip schon ausreichend erläutert erscheint.

9. Typ: $$\frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b} + \frac{\gamma}{x-c} = \frac{\delta x^2 + Ax + B}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

[illegible] $\alpha + \beta + \gamma - \delta \neq 0$

[illegible] $b \neq c$;

$c \neq a$. A und B können so bestimmt werden, daß die sich [illegible] beliebige Lösungen hat, z.B. auch a, b oder c.

10. Typ: $$\frac{\alpha x + \beta}{(x-a)(x-b)} + \frac{\gamma x + \delta}{(x-b)(x-c)} = \frac{\varepsilon x^2 + Ax + B}{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$\alpha + \gamma \neq \varepsilon$ (am [illegible] $\alpha + \gamma - \varepsilon = 0$) ;

a, b, c, β, δ beliebig

A und B können so bestimmt werden, daß die sich durch Umformung ergebende quadratische Gleichung beliebige Lösungen hat, z.B. auch a, b oder c.

...it den angeführten Beispielen wird ein reiches Übungsmaterial zu Bruchgleichungen angeboten. Entsprechend sollte man auch Übungskomplexe, z.B. zu Textaufgaben (Strukturbild V) oder zu Klassen von Gleichungen (Strukturbild VI) oder auch zu allen ...

Die unterrichtspraktischen Untersuchungen

1. Die Organisation

1.1. Versuchsklassen

Die Untersuchungen wurden in den Schuljahren 1964/65 bis 1968/69 an Leipziger Oberschulen durchgeführt. Die Übersicht auf Tabelle 1 zeigt den Ablaufplan. Die Versuchsklassen des ersten Versuchs befanden sich an der 39. Oberschule und die des zweiten Versuchs an der 39. und 22. Oberschule. Die Auswahl der Klassen resultierte lediglich aus der Bereitschaft der unterrichtenden Mathematiklehrer und der entsprechenden Schulleitungen, bei den Untersuchungen mit zu helfen. Die Schüler der ausgewählten Klassen waren in keinerlei Weise bevorzugt gegenüber anderen. Die folgende Tabelle zeigt die Durchschnitte der Schuljahresendzensuren [44] für die 6. Klassen, die von der 7. Klasse an Versuchsklassen waren.

...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...

Durch das freundliche Entgegenkommen der Schulleitungen der beiden Oberschulen war es sowohl beim ersten Versuch als auch beim zweiten Versuch möglich, 7.Klassen nur aus solchen Schülern ... anzustellen, die am Versuch 7. Klasse und 8. Klasse

teilgenommen hatten. Auf diese Weise konnten die Untersuchungen

Im Schuljahr 1965/66 wurden Voruntersuchungen mit dem Ver-

terten Karl-Marx-Oberschule durchgeführt. Im Schuljahr 1967/68 war es möglich, parallel zum 2. Versuch 9. Klasse auch in einer 9. Vorbereitungsklasse Untersuchungen laufen zu lassen.

1.2. Vergleichsklassen

In den 7. und 8. Klassen erwies es sich als wenig sinnvoll, Ver-

Für die 9. und 10. Klassen wurde bei beiden Versuchsdurchgängen mit Vergleichsklassen gearbeitet, in denen der Unterricht in "traditioneller" Weise, d.h. auf der Grundlage des gültigen Lehrplans, geplant war.

1.3. Arbeitsgemeinschaft

Im Schuljahr 1965/66 wurde parallel zum 1. Versuch in den 8. Klassen mit den 9 besten Schülern der drei Versuchsklassen von mir eine Arbeitsgemeinschaft im Umfange von 26 Doppelstunden

(Vgl. Kapitel 2.3.).

1.4. Weitere Untersuchungen

In schulpraktischen Übungen der Studenten, die zum Teil in Versuchsklassen stattfanden, konnten die Gedanken der Unterrichts-

wurde in schulpraktischen Übungen mit Studenten mehrfach das Stoffgebiet Gleichungen in 7.,8.,und in 9. Klassen (nicht Versuchsklassen) unter

versuche behandelt (Vgl. Kap. 5.4.).

1.5. Die Unterrichtenden

In den Versuchsklassen

und zwei 9. Klassen und im zweiten Versuch in je einer Klasse der Unterricht von mir durchgeführt. Alle übrigen Unterrichtsstunden übernahmen die Mathematiklehrer der Klassen,

39.OS; zwei erfahrene Mathematiklehrer mit langjähriger Berufs[illegible] Diese Kollegen unterrichteten auch in den 9. und 10. Versuchsklassen. Nur einige Einzelstunden wurden hier von mir gehalten.

In der Vorbereitungsklasse [illegible] der Erweiterten Thomas-Oberschule wurden die [illegible] auf der Grundlage des Versuchsmaterials von der wissenschaftlichen Assistentin für Methodik des Mathematikunterrichtes, C.Riehl, durchgeführt.

In den Vergleichsklassen des ersten Versuchs unterrichteten die Kollegen A.Roßberg, 39.OS, E.Krinke, 22.OS, und Dr.Th.Immisch, 39.OS. Beim zweiten Versuch lagen die Verhältnisse so, daß die beiden Mathematiklehrer der Versuchsklassen, H.Herzog und W. Voigt, gleichzeitig je eine Vergleichsklasse übernahmen.

4.1.6. Statistische [illegible]

a) Im Rahmen des Unterrichtsversuches wurden insgesamt 410 Unterrichtsstunden in Versuchsklassen gehalten. Diese Zahl setzt sich im einzelnen [illegible] zusammen:

	1. Versuch	2. Versuch	insgesamt
7. Klassen	87 Stunden	128 Stunden	215 Stunden
8. Klassen	36 "	48 "	84 "
9. Klassen	37 "	74 "	111 "
insgesamt	160 Stunden	250 Stunden	410 Stunden

Dabei sind nicht mitgezählt die Unterrichtsstunden in der 9. Vorbereitungsklasse, die Stunden für Spätkontrolle und Wiederholung und die Stunden für die beiden Leistungskontrollen in den 10. Klassen. Hinzu kommen außerdem noch 52 Stunden Arbeitsgemeinschaft.

b) Es liegen 152 Stundenprotokolle vor, die zum Teil von mir und zum Teil von den Kollegen H.Herzog und W.Voigt oder von Studenten angefertigt wurden. [illegible] 86 Protokolle aus 7. Klassen, 29 aus 8. Klassen und 37 aus 9. Klassen.

c) Beim ersten Versuch [illegible] ("M"),10 Seiten Übungsmaterial ("Ü") und 7 Seiten Wiederholungsmaterial für die 7. Klasse ausgegeben.

Beim zweiten Versuch waren es 8 Seiten Merkmaterial, 14 Seiten Übungsblätter sowie 10 Seiten Übungsmaterial für die Wiederholung. Die Übungsblätter, die im Unterricht und für Hausaufgaben eingesetzt wurden, wurden für die [illegible] tung jeweils wieder eingesammelt, ebenso das Wiederholungsmaterial. Das Merkmaterial verblieb in der Hand des Schülers.

d) Für alle schriftlichen Ldstungskontrollen wurden Übungsblätter bzw. vorbereitete Aufgabentexte für jeden Schüler bereitgestellt. Das gilt auch für die Vergleichsklassen. Für die Versuchsklassen waren es insgesamt 24 Arbeiten, für die Vorbereitungsklassen 9. Klasse und 10. Klasse je 6 Arbeiten und für die Vergleichsklassen 9. Klasse und 10. Klasse ebenfalls 6 Arbeiten (bzw. 5 Arbeiten beim ersten Versuch).

Für den Gesamtversuch waren insgesamt etwa 4400 Arbeiten auszuwerten. Die Zahl kommt folgendermaßen zustande:

[illegible]	[illegible] 1. [illegible]	[illegible]	Zahl der Arbeiten pro Klasse	Gesamtzahl der Arbeiten
7. Klassen	[illegible]	[illegible]	8	1912
8. Klassen	[illegible]	[illegible]	5 bzw. 6	347
9. Klassen	[illegible]	[illegible]	6	564
10. Klassen	[illegible]	[illegible]	6	[illegible]
9. Vortereitgs-klasse	[illegible]	[illegible]	6	[illegible]
10. Vortereitgs-[illegible]	[illegible]	[illegible]		66
[illegible]				
9. Klassen	[illegible]	[illegible]	6	[illegible]
10. Klassen	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
[illegible]				[illegible]

Für diejenigen Schüler, die von der 7. Klasse bis zur 10. Klasse im Rahmen des Versuchs unterrichtet wurden, - das waren 33 Schüler beim 1. Versuch und 61 Schüler beim 2. Versuch [illegible]

genommen werden, um für diese 94 Schüler durchgängige Aussagen von der 7. Klasse bis zur 10. Klasse machen zu können.

4.2. Die Gesamtauswertung

4.2.1. [illegible] für Versuchs- und Vergleichsklassen

Die [illegible] Klassen; [illegible] wurden. Die Angaben für die 6. Klassen sollen die Ausgangssituation fixieren. [illegible] aus Schülern der 8. Versuchsklassen zusammengestellt wurden. Diese [illegible]. Im Mittelfeld findet man somit Angaben über diejenige gleichbleibende Schülergesamtheit, die am gesamten Versuch durchgängig von der 7. Klasse bis zur 10. Klasse teilgenommen hat.

Wird im folgenden nichts anderes gesagt, so ist in den Auswertungen diese Schülergesamtheit gemeint, wenn von "Versuchsklassen" des ersten bzw. des zweiten Versuchs gesprochen wird.

In der rechten Spalte wurden die 9. und 10. Vergleichsklassen aufgeführt. Die Angaben über die vorangehende Klassenstufe (8. bzw. 9. Klasse) dienen wiederum der Erfassung der Ausgangssituation.

[illegible] 23: Wenn man von der Vergleichsklasse [illegible] wenig. Diese Klasse bestand aus Schülern, die aus der gesamten Stadt Leipzig zu einer Klasse mit Berufsausbildung für Maschinenbau zusammengestellt worden waren. Sie erhielten ihre Berufsausbildung im Leipziger Drehmaschinenwerk. Ihre Lernhaltung war überdurchschnittlich gut. Da die Durch[illegible] extrem guten Durchschnitts der 9. Klasse als Vergleichsklasse beibehalten.

Für die Schüler der Versuchsklassen sollen jetzt die Durch[illegible] der einzelnen Klassenstufen für den 1. und 2. Versuch verglichen werden. Die Tabelle 25 enthält die [illegible] für die einzelnen Zensuren

sowie die Durchschnitte

Die Tabelle 25 bzw. die graphische Darstellung der Abbildung 1 zeigen, daß beim 2. Versuch in allen Klassenstufen schlechtere Durchschnitte der Schuljahresendzensuren vorlagen als beim 1. Versuch.

Um im weiteren die Untersuchungsergebnisse des 1. Versuchs mit denen des 2. Versuchs vergleichen zu können, war zu prüfen, ob die vorhandenen Unterschiede der Mittelwerte der Schuljahresendzensuren signifikant oder nicht signifikant sind. Die Prüfung wurde mittels des t-Tests (Vgl. /121, S.162 bis 164/ oder /14, S.177 bis 181/) vorgenommen.

[illegible] weil es sich zum Teil um statistisch kleine und mittlere Stichproben handelt, [illegible] auch für große Stichproben anwendbar ist.

Die Voraussetzung der Normalverteilung der jeweiligen Grundgesamtheiten, aus denen die Stichproben entnommen wurden, kann als gesichert angenommen werden. Es handelt sich bei den Zufallsvariablen um Zensuren, die als Punktwertklassen anzusehen sind. Sowohl bei den Jahresendzensuren als auch bei den im weiteren verwendeten Zensuren der Kontrollarbeiten wird bei wachsendem Stichprobenumfang die Annäherung an die Normalverteilung immer besser, so daß die jeweiligen Grundgesamtheiten als normalverteilt vorausgesetzt werden können.

Eine weitere Voraussetzung für die Anwendung des t - Tests besteht darin, daß die Varianzen der beiden jeweiligen Grundgesamtheiten gleich sein müssen. Es muß also vor Anwendung des t - Tests geprüft werden, ob ein Unterschied der Stichprobenvarianzen noch als zufällig angesehen werden kann oder ob er signifikant ist. Dazu wurde mittels der Prüfgröße $F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$

[illegible] s_1^2 [illegible]

[illegible]

Die Nullhypothese lautete im vorliegenden Fall (Vgl. Tabelle 25) wie folgt: Die Unterschiede der Mittelwerte der Schuljahresendzensuren von Versuchs- und Vergleichsklassen sind nicht signifikant. Es wurde eine Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % ($\alpha = 0{,}05$) zugrundegelegt.

Diese Nullhypothese konnte, wie der t-Test ergab, für alle Klassenstufen von der 5. bis zur 10. Klasse nicht zurückgewiesen werden.

Damit erwiesen sich die Unterschiede der Zensuren der jeweils vorangehenden Klassenstufe (5. bis 9. Klasse) kein signifikanter Unterschied bestand, konnte im folgenden in allen Klassenstufen davon ausgegangen werden, daß die Untersuchungen jeweils an zwei Stichproben, die aus der gleichen Grundgesamtheit stammen, vorgenommen wurden.

Da für die 5. Klasse und 6. Klasse das 1. und 2. Versuchs ein Vergleich zwischen den Unterrichtsergebnissen der Versuchs- und Vergleichsklassen durchführbar war, war auch hier die jeweilige Ausgangssituation zu ermitteln. In den Tabellen 26 und 27 erscheinen wieder die Häufigkeiten der Zensuren und die Durchschnitte.

Auch für die Durchschnitte der Schuljahresendzensuren von Versuchs- und Vergleichsklassen wurde der Unterschied mittels des t-Tests auf Signifikanz untersucht. Die Nullhypothese lautete: Die Unterschiede zwischen den Mittelwerten der Schuljahresendzensuren von Versuchs- und Vergleichsklassen sind nicht signifikant. Diese Nullhypothese erhielt die Irrtumswahrscheinlichkeit für alle drei Klassenstufen (5., 6. und 10. Klasse) sowohl des ersten als auch des zweiten Versuchs nicht zurückgewiesen werden.

Damit ist auch hier sichergestellt, daß die Untersuchungen an jeweils zwei Stichproben aus der gleichen Grundgesamtheit vorgenommen wurden.

Für die Vorbereitungsklasse 1967/68 (9. Klasse) bzw. 1968/69 (10. Klasse) ergab sich sowohl für die 9. als auch für die 10. Klasse, daß die Nullhypothese mit $\alpha = 0{,}05$ zurückgewiesen werden mußte, daß diese Klassen die besseren Durchschnitte hatten als die Versuchs- und die Vergleichsklassen. Für die 8. Klasse konnte außerdem dort kein Vergleich vorgenommen werden, da die Endzensuren der 8. Klasse nicht mehr beschaffbar waren. In den weite-

ren statistischen Prüfungen erscheint die Vorbereitungsklasse aus den beiden genannten Gründen nicht.

4.2.2. Die Durchschnitte der Zensuren der Kontrollarbeiten des ersten und zweiten Versuchs

Zur Messung der Unterrichtsergebnisse wurden u.a. die Zensuren der Kontrollarbeiten herangezogen.

Die Tabellen [illegible] bis [illegible] zeigen die Häufigkeiten für die Zensuren und die Mittelwerte (Durchschnitte), die in den Kontrollarbeiten im Verlaufe der Untersuchungen erzielt worden sind.

4.2.2.1. Vergleich der Durchschnitte der Zensuren der Kontrollarbeiten für die Versuchsklassen des ersten und zweiten Versuchs

Die Tabellen [illegible] bis [illegible] und [illegible] zeigen die Durchschnitte aller Kontrollarbeiten des ersten und zweiten Versuchs und auch den jeweiligen Gesamtdurchschnitt für alle Arbeiten einer Klassenstufe. Ein Vergleich soll durch die graphische Darstellung aller Zensurendurchschnitte der Arbeiten mittels der Abb. 4 erleichtert werden.

Aus diesen Tabellen bzw. der graphischen Darstellung läßt sich auf den ersten Blick einiges ablesen:

1) Von den insgesamt [illegible] Kontrollarbeiten, die bei beiden Versuchsdurchgängen geschrieben wurden, erbrachten 13 beim 2. Versuch einen besseren Zensurendurchschnitt als beim 1. Versuch. Wir sind der Meinung, daß diese besseren Leistungen vor allem in der 7. Klasse des 2. Versuchs einmal durch generelle methodische Verbesserungen, die aus den Erfahrungen des 1. Versuchs resultierten, und zum anderen durch den verstärkten Einsatz von Unterrichtsmitteln erzielt werden konnten.

2) Vergleicht man 8/IV mit 9/I, so ist bei beiden Versuchen ein starker Leistungsabfall zu erkennen. Er zeigt an, daß im Verlauf der Sommerferien von der 8. Klasse zur 9. Klasse sehr viel an Kenntnissen in Vergessenheit geraten war.

Vergleicht man entsprechend die Ergebnisse von 9/VII und 10/I, so ist [illegible] in diesem Falle sogar ein Leistungsanstieg erfolgt, [illegible] wie 9/I, [illegible]

lung geschrieben; die Arbeiten 9/VII und 10/I enthielten dabei die gleichen Aufgaben. Wir führen den Leistungsanstieg u.a. darauf zurück, daß das Bewußtsein der Schüler gegenüber dem Beginn der 9. Klasse gestiegen war, und die Schüler den am Beginn des Schuljahres erteilten Auftrag, das Stoffgebiet zu wiederholen, ernstgenommen hatten.

3) Für die Arbeiten 7/V (2. Kontrollarbeit 7. Klasse), 9/I (Eröffnungsarbeit 9. Klasse) und 9/VII (Spätkontrolle 9. Klasse) konnten beim 2. Versuch trotz methodischer Ver-

Für die Arbeit 7/V gibt es dafür objektive Ursachen. Hier wurden die Schüler überfordert, da die Kenntnisse über das

wesentliche gesagt worden. Die Arbeit 9/VII stellt die Spätkontrolle der 9. Klasse dar, die ca. 6 Wochen nach Abschluß der Behandlung der Gleichungen geschrieben wurde. Es zeigte sich in beiden Versuchen, daß vor allem das Lösen von Gleichungssystemen sehr stark dem Vergessen anheimgefallen war.

4) Berechtigt ist auch die Frage nach dem Grund für die beim 2. Versuch im Vergleich zum 1. Versuch schlechteren Leistungen in den Arbeiten 9/III/IV, 9/V, 9/VI und 9/VII. Hierüber geben die Fehleranalysen (Vgl. 4.2.3.) Aufschluß. Bei 9/VI z.B. gibt die Aufgabe 2 den Ausschlag und bei 9/VII die Aufgabe 1.

An dieser Stelle ist noch eine grundsätzliche Bemerkung angebracht: Die Zensuren der schriftlichen Leistungskontrollen wa-

als die Jahresendzensuren (Vgl. Tabelle 25). Das galt nicht in

angeführten Zensuren der Kontrollarbeiten eingingen.

Es

daß die Schüler während des Unterrichtsversuches stärker gefordert wurden, als das im allgemeinen in den anderen Stoffgebieten der Fall war. Daß es sich nicht um eine Überforderung handelte, bewies unter anderem das

gute Gesamtniveau der mathematischen Kenntnisse und Fähigkeiten der Schüler beider Versuche. Dies äußerte sich in den guten Leistungen der Schüler der Versuchsklassen in den schriftlichen Abschlußprüfungen der 10. Klassen aus (1967/68: 10c, 39.OS : [illegible] ; 1968/69: 10c, 39.OS : [illegible] und 10c, 39.OS : 2,53) und ebenso in den Durchschnitten der Abschlußzensuren (2,18 ; 2,42 ; 2,47). In den mündlichen Prüfungen fielen die Schüler der Versuchsklassen überdies ausgesprochen positiv wegen der Exaktheit und Gewandtheit im Umgang mit der mathematischen Fachterminologie auf.

Nach den Ausführungen über Leistungsunterschiede zwischen dem 1. und dem 2. Versuch an Hand der Tabellen 28 bis 32 und 34 und der Abb. 4 interessiert die Frage, ob diese Unterschiede statistisch als nur zufällig oder als signifikant anzusehen sind.

Der Unterschied der Zensurendurchschnitte der Kontrollarbeiten des 1. und des 2. Versuchs wurde deshalb mit Hilfe des t-Tests auf Signifikanz geprüft. Die Nullhypothese lautete:
Der Unterschied zwischen den Mittelwerten der Zensuren der Kontrollarbeiten des ersten und des zweiten Versuchs ist

a) für die 7. Klassen,
b) für die 8. Klassen,
c) für die 9. Klassen,
d) für die 10. Klassen

nicht signifikant.

Diese Nullhypothese konnte bei [illegible] Irrtumswahrscheinlichkeit in keinem Fall zurückgewiesen werden. Das heißt, daß die Leistungsunterschiede, die an Hand der Tabellen und der zugehörigen Abbildung diskutiert wurden, statistisch als zufällig anzusehen sind. Eine signifikante Leistungsverbesserung konnte somit vom 1. zum 2. Versuch nicht erreicht werden.

4.2.2.2. Vergleich der Durchschnitte der Zensuren der Kontrollarbeiten für die Versuchs- und Vergleichsklassen des ersten und zweiten Versuchs

Die Tabellen 31, 32 und 33 bzw. 34 und 35 enthalten die erforderlichen Zensurenangaben für einen Vergleich. Eine graphische Veranschaulichung der Zensurendurchschnitte (Vgl. Abb. 5 und Abb. 6) soll auch hier den Sachverhalt verdeutlichen. In die

Abb. 6 wurden zum Vergleich auch die Zensurendurchschnitte der Kontrollarbeiten der Vorbereitungsklasse 9 bzw. 10 aufgenommen, die in der Tabelle 36 aufgeführt sind.

Ein Vergleich der Durchschnitte der Leistungskontrollen an Hand der Tabellen 31 bis 35 und der graphischen Darstellungen Abb. 5 und Abb. 6 führt zu den folgenden Bemerkungen:

1) Sowohl beim 1. Versuch als auch beim 2. Versuch sind die Durchschnitte der Zensuren der schriftlichen Leistungskon- [illegible] schlechter oder gleich denen der Versuchsklassen. Eine Ausnahme bildet lediglich die [illegible]

2) In der Vorbereitungsklasse waren die Anfangsschwierigkeiten [illegible] an über denen der Versuchsklassen. Außerdem war das Gesamtbild der Leistungen dort ausgeglichener.

Der [illegible] Vergleichsklassen war wiederum statistisch zu prüfen. Es war also die Frage zu be- [illegible] schnitte in den Kontrollarbeiten erreicht werden konnten als in den Vergleichsklassen.

Die [illegible] bei 5% Irrtumswahrschein- [illegible]

1) Im 1. Versuch [illegible] ziolt werden als in den zugehörigen Vergleichsklassen.

2) Im 2. Versuch konnte in den Versuchsklassen 9. Klasse ein signifikant besserer Zensurendurchschnitt bei den Kontrollarbeiten nachgewiesen werden als in den zugehörigen Vergleichsklassen. Für die 10. Klassen war der Unterschied der Zensurendurchschnitte nicht signifikant.

Diese [illegible] Elemente des Unterrichts in den Versuchsklassen in den Unterricht der Vergleichsklassen eingeflossen waren (Vgl. dazu auch

Kapitel 5.2.2.), was dort zu einer Leistungssteigerung führte.

Insgesamt kann man es also, abgesehen von diesem letzten Fall, als statistisch gesichert betrachten, daß der Unterricht auf der [illegible] geführt hat als der "traditionelle" Unterricht.

4.2.3. [illegible]

Für genauere Vergleiche und insbesondere für ein Vordringen zu den Ursachen von Fehlleistungen geben die Zensuren allein ein zu grobes Bild. Deshalb wurden für sämtliche Kontrollarbeiten der Versuchs- und Vergleichsklassen und auch der Vorbereitungsklasse im Verlaufe der Untersuchungen Fehleranalysen [45] folgender Art angefertigt:

Die Aufgaben der Kontrollarbeiten wurden, wenn möglich, in "Einzelschritte" zerlegt, die im allgemeinen den Aufträgen in den Handlungsvorschriften bzw. Grundaufgaben oder speziellen Tätigkeiten entsprachen, jeder [illegible] wurde mit einem Punkt bewertet. Mittels Strichliste wurde dann festgestellt, wieviel [illegible] richtig ausführten. Die derart ermittelten Häufigkeiten wurden in prozentuale Häufigkeiten umgerechnet (Prozent richtiger Ergebnisse bezogen auf die Anzahl der Schüler). Damit war eine Vergleichbarkeit [illegible] Versuch und zwischen Versuchs- und Vergleichsklassen gegeben.

Derartige Fehleranalysen ermöglichen eine Lokalisierung der Fehlerquellen innerhalb der einzelnen Aufgaben bzw. Stoffabschnitte. Sie zeigen, in welchem Maße die einzelnen "Schritte" von den Schülern einer Klasse beherrscht werden und markieren zugleich die Fehlerschwerpunkte. Sie bilden damit die Voraussetzung für ein Vordringen zu den Ursachen von Fehlleistungen.

Diese Ursachen können von sehr unterschiedlicher Natur sein; sie [illegible] dischem Bereich zu suchen sein. Im letzteren Falle werden sie im allgemeinen aus den Fehleranalysen unter Einziehung von Nachbereitungen und Stundenprotokollen aufzudecken sein. Ein Vordringen auch zu den übrigen Ursachen war im Rahmen dieser Untersuchungen von der Anlage her im allgemeinen nicht vorgesehen.

Die oben genannten Fehleranalysen bildeten im Verlauf der Unterricht [illegible] Veränderungen des Lehrganges und gezielte Hilfen für die einzelnen Klassen. Sie waren ferner für die Überarbeitung und Ergänzung der Übungsblätter für den 2. Versuch, 7. Klasse, eine wertvolle Hilfe. Außerdem wurde bei der Ausarbeitung jeder neuen Kontrollarbeit von den Fehleranalysen der vorangehenden Arbeiten ausgegangen. Die Fehleranalysen bildeten weiterhin die Grundlage für die Auswertung nach Problemkomplexen (Vgl. Kapitel 4.3.) und bis hin zu den einzelnen Tätigkeiten.

Die Tabellen 37 und 38 zeigen zwei Beispiele für Fehleranalysen, und zwar für die Kontrollarbeiten 7/VIII und 9/III/IV.

<u>Bemerkungen zu den Fehleranalysen</u>

1) [illegible] Weise wie in Beispiel 1 und Beispiel 2 ausgeführt.

2) [illegible] 7/VIII [illegible] Da es sich bei 7/VIII um die Abschlußarbeit für die 7. Klasse handelte, war damit auch eine Ausgangsposition für die 8. Klasse fixiert.

3) Die Fehleranalyse für 9/III/IV spiegelt im wesentlichen den Leistungsstand auf der Grundlage der Handlungsvorschrift H_1 wider. Die Aufgaben 1. und 2. erscheinen bei der Auswertung nach Problemkomplexen wieder (Vgl. Kap. 4.3.3.). Entsprechend wurde bei allen Aufgaben, die gemäß H_1 zu erledigen sind, verfahren. Allerdings machte sich in manchen Fällen eine besonders starke Aufschlüsselung, wie hier bei 4., erforderlich, um die Fehlerquellen differenziert erfassen zu können.

4) Methodische Verbesserungen des Lehrganges spiegeln sich in den Fehleranalysen wider. So waren z.B. allgemeingültige Gleichungen [illegible] berücksichtigt worden. Das wirkte sich u.a. auf 7/VIII, Aufgaben 4., 11. und 14 positiv aus und ist sogar noch bei 9/III/IV, 3, Schritt 5 erkennbar.

5) [illegible] daß die Fehleranalyse nicht differenziert genug war, wurden besonders [illegible]

leistungen weiter analysiert. Das gilt hier z.B. bei 9/III/IV, 1. und 3. für den ersten Schritt. Man konnte so [illegible] im Nichtausschließen der Null und bei 9/III/IV, 3. im Ausschließen von -2, obwohl $-2 \notin \mathbb{N}$, zu suchen war.

6) Die Fehleranalyse zu 9/III/IV zeigt u.a. auch, daß der Fallunterscheidung bei Gleichungen mit Parametern (Formvariablen) in beiden Versuchen zu wenig Beachtung geschenkt worden war. Nur so ist es erklärlich, daß kein Schüler dabei richtig vor- [illegible] wesentlich mehr Wert zu legen.

7) Weitere Ausführungen zur Arbeit mit den Fehleranalysen sind im folgenden Kapitel zu finden.

8) Insgesamt kann man feststellen, daß sich die Fehleranalysen in der vorliegenden Form bewährt haben.

4.3. Die Auswertung nach Problemkomplexen

Im Kapitel 3.2. wurden die Aufgabenstellungen des Stoffgebietes mittels der Strukturbilder zu Problemkomplexen zusammengefaßt. [illegible] lung nicht ausreichend [illegible] gehend von den Strukturbildern und auf der Grundlage der Fehleranalysen aller Kontrollarbeiten noch zusätzlich eine Auswertung nach Problemkomplexen vorgenommen.
Wie hierbei vorgegangen wurde, soll an einigen Beispielen demonstriert werden. Wir wählen dazu die Problemkomplexe zu den Strukturbildern IIa, III und IV aus.

Die Angaben von Zahlen verstehen sich dabei wiederum als Prozentzahlen und beziehen sich auf die Schüler, die von der 7. Klasse bis zur 10. Klasse an den Versuchen teilgenommen haben (1. Versuch - 2. Versuch).

4.3.1. Auswertung für das Strukturbild II a

Das Strukturbild IIa veranschaulicht die folgenden drei Aufgabenstellungen, [illegible] angegeben werden sollen, so daß auch Ungleichungen mit inbegriffen sind.

1) Gib die Lösungsmenge für eine Gleichung (Ungleichung) mit Variablen an, wenn die Lösungsgrundmenge gegeben ist.

2) Gib eine mögliche Gleichung (Ungleichung) aus einer vorgegebenen Klasse an, wenn ihre Lösungsmenge und ihre Lösungsgrundmenge gegeben sind.

3) Gib eine mögliche Lösungsgrundmenge an, wenn eine Gleichung (Ungleichung) mit Variablen und eine Menge, die sie als Lösungsmenge haben soll, gegeben sind.

Aufgabenstellungen zum Strukturbild IIa erschienen in verschiedenen Kontrollarbeiten. Für die 7. Klasse zeigt die Tabelle 39 ihre richtige Ausführung in Prozentangaben (Vgl. dazu auch die Abbildungen 7, 8 und 9). In der Tabelle 40 findet man dazu die Anzahlen der Schüler, auf die sich die Prozentzahlen von Tabelle 39 beziehen.

Aus der Tabelle 39 geht auf diese Weise hervor, wie die drei Aufgaben [illegible] in den Kontrollarbeiten der 7. Klassen beider Versuche von den Schülern erledigt wurden. Dabei wurden kompliziertere Aufgaben, bei denen zum Lösen der Gleichungen die Umformungsregeln nötig sind, nicht einbezogen. Derartige Aufgaben erscheinen beim Strukturbild IV.

Da die Reihenfolge der Aufgaben innerhalb einer Kontrollarbeit zufällig ist, wurden in der graphischen Darstellung für den 1. Versuch innerhalb jeder Arbeit die Aufgaben so angeordnet, daß fallende Prozentwerte dazugehören.

Aus den Tabellen bzw. den zugehörigen graphischen Darstellungen läßt sich dann ablesen, welche Aufgaben die meisten und welche die [illegible] dabei auch die zeitliche Abfolge der Arbeiten berücksichtigen. So ist es z.B. interessant, daß die in der Eröffnungsarbeit der [illegible] ($\{e \mid e \in \mathbb{Q} \text{ und } 3e = 4a\}$), die nur von 10 % der Schüler des 1. Versuchs richtig gelöst wurde, [illegible] ($\{\ldots \mid \ldots \in \mathbb{Q} \text{ und } \ldots\}$) in der Kontrollarbeit der Wiederholung 55 % richtige Lösungen ergab. Bei der Stoffvermittlung war diese Aufgabe übrigens als 7/III 3b ($\{y \mid y \in \mathbb{Q} \text{ und } \ldots\}$) [illegible] in einer Arbeit erschienen und wurde dort von 64 % der Schüler richtig bearbeitet

worden. Ähnlich, wenn auch nicht so kraß, sieht das Bild beim 2. Versuch aus. - Eine Ursache für diese Fehlleistungen ist offenbar darin zu suchen, daß die Schüler den Satz, daß ein Produkt genau dann Null ist, wenn mindestens ein Faktor Null ist, nicht sicher beherrschten, daß also hier das Vergessen [illegible]

Im Verlaufe der Unterrichtsversuche hatte sich folgende Arbeitsmethode herausgebildet:

Aus den Fehleranalysen wurden die Prozentangaben in besondere Tabellen für die einzelnen Problemkomplexe übertragen. Diese "Buchführung" wurde für alle Untersuchungen vorgenommen. Aus den so hergestellten Übersichten (Die angeführten Beispiele werden hier Tabelle 39, 41 und 43 genannt) waren die Hauptfehlerquellen für die einzelnen Aufgabenstellungen zu jedem Zeitpunkt der Untersuchungen leichter ablesbar als aus den Fehleranalysen selbst. Die Entwicklung der Befähigung der Schüler zum Lösen der einzelnen Aufgabenstellungen eines Problemkomplexes konnte so über die gesamten Untersuchungen hinweg gut verfolgt werden.

Geht man dann noch zu einer graphischen Veranschaulichung nach Art der Abbildungen 7, 8 und 9 über, so werden die erzielten [illegible] deutlich. Auch ein Vergleich zwischen [illegible] mit schnell durchführen.

So erkennt man [illegible] Aufgabenstellung 1 (Vgl. Abb. 7) sofort, daß die Leistungen vom 1. zum [illegible] und daß z.B. kein Prozentwert mehr unter 20 % liegt, oder, wo bei der Aufgabenstellung 2 (Vgl. Abb. 8) ein Leistungsanstieg erreicht werden konnte, oder, daß bei der Aufgabenstellung 3 (Vgl. Abb. 9) ein solcher schon im 1. Versuch von der ersten zur letzten Aufgabe hin offensichtlich ist, usw.

Aus [illegible] dann in Verbindung mit [illegible] noch weitere [illegible] Fehlleistungen ziehen wie zum Beispiel der folgende: Bei 7/II e [illegible] Versuch) resultieren [illegible] 7/III e (Aufgabenstellung [illegible]) die Schwierigkeiten aus der Angabe der Grundmenge ("y ist posi-

tive ungerade Zahl "bzw."y ist Primzahl") und nicht aus der Ungleichung.

Verfolgt man übrigens die Aufgabenstellungen 2 und 3 über die weiteren Schuljahre, so kann man z.B. in der 9. Klasse (1. Versuch, 33 Schüler; 2. Versuch, 24 Schüler) bei der Aufgabe 9/VI 4 (Aufgabenstellung 2) 94 % bzw. 87 % richtige Ergebnisse verzeichnen und bei der Aufgabe 9/VI 3c 76 % bzw. 77 %.

[illegible] lungen ist, alle drei Aufgabenstellungen gleichberechtigt zu behandeln, so [illegible] bereiteten, zufriedenstellend von den Schülern bearbeitet werden konnten.

[illegible]

4.3.2. [illegible]

Das [illegible] (vgl. Kap. 3.2.1.) veranschaulicht wiederum drei [illegible], die knapp so formuliert werden sollen:

1. [illegible]: Gleichung G_I, Gleichung G_{II}, gemeinsame Lösungsgrundmenge
   Gesucht: Äquivalenz ?
2. [illegible]: Gleichung G_I, Lösungsgrundmenge, Äquivalenz
   [illegible]: Gleichung G_{II}
3. [illegible]: Gleichung G_I, Gleichung G_{II}, Äquivalenz
   [illegible]: Lösungsgrundmenge

Die [illegible] versuch von der 7. Klasse bis zur 10. Klasse an Hand von Aufgaben etwa gleichen Schwierigkeitsgrades verfolgen. Die Tabelle 41 zeigt, wieviel Prozent der Schüler jeweils eine richtige Entscheidung hinsichtlich der Äquivalenz der beiden gegebenen Gleichungen treffen konnten. In der Tabelle 42 findet man die entsprechenden Schülerzahlen. In der Tabelle 41 werden richtige Entscheidungen auf Grund falsch errechneter Lösungsmengen mit-

gezählt, d.h. die Tätigkeit S_6 wird isoliert von S_7 und S_3 aufgeführt. S_7 und S_3 gehen in die Bestimmung von L_1 und L_2 (Lösungsmengen der beiden Gleichungen) ein.

Aus der Tabelle 41 bzw. den zugehörigen graphischen Veranschaulichungen (Abb. 40 und 41) [illegible]:

1. Im 1. Versuch [illegible] Schwierigkeiten als im 2. Versuch auf, sowohl bei der Bestimmung von L_1 und L_2 als auch bei der richtigen Entscheidung über die Äquivalenz. Durch methodische Verbesserung des Lehrgangs konnten im 2. Versuch bessere Leistungen erzielt werden.
2. Trotz Schwierigkeiten bei der Bestimmung von L_1 und L_2 wurde in einigen Fällen die Tätigkeit S_6 richtig ausgeübt (ausgehend von evtl. auch falsch errechneten Lösungsmengen), z.B. bei 7/IV 3., 1. und 2. Versuch und 9/II 2., 1. und 2. Versuch. Das deutet auf eine gute Beherrschung von S_6 hin.

Schlußfolgerung: [illegible] ermöglicht eine differenziertere Aufdeckung von Fehlerquellen als ein bloßes Auswerten von Endergebnissen. Sie ist besonders im Verlauf der [illegible]. In den Unterrichtsversuchen konnte so durch konsequente Arbeit mit Aufgaben zur Entscheidung über die Äquivalenz von Gleichungen ein Leistungsanstieg im 1. Versuch von Beginn bis zum Ende erzielt werden. Ebenso konnte ein Gesamtleistungsanstieg vom 1. zum 2. Versuch erreicht werden. Die Beherrschung der Tätigkeit S_6 war vor allem im 2. Versuch gut. Das erwies sich auch in den mündlichen Darlegungen der Schüler (Tätigkeit S_6 zusammen mit Tätigkeit S_8).

Die [illegible] Umformungen [illegible] Schülern nicht nur bei der Herleitung von Umformungsregeln bewußt zu machen, sondern auch dann, wenn bereits eine Lösungsvorschrift vorliegt. [illegible] Fragestellung 2 nur [illegible] zur ersten Gleichung [illegible] bekannten [illegible] wurde im Unterrichtsversuch immer wieder eingegangen.

Explizit wurde die Aufgabenstellung 2 nur in der Abschlußarbeit 10/II des 2. Versuchs als Aufgabe 2b gestellt, wo sie 96 % der 56 Schüler richtig lösten.

Schlußfolgerung: Die Beherrschung dieser Aufgabenstellung spiegelte sich vor allem in mündlichen Leistungen wider. Aus der Abarbeitung von Regeln und Verfahren lassen sich kaum Schlüsse ziehen. Die mündlichen Leistungen waren im allgemeinen zufriedenstellend zu bewerten.

Die [illegible] auf und man kann ihre Erledigung z.B. beim Strukturbild IV als ersten Schritt der Handlungsvorschrift H_1 verfolgen (Vgl. Kap. 4.3.3.).

Bezeichnet man nämlich die gegebene Bruchgleichung als G_I und die durch Multiplikation mit dem Hauptnenner entstehende Gleichung als G_{II}, so taucht das Problem auf, ausgehend von der gegebenen [illegible] eine solche Lösungsgrundmenge für beide Gleichungen zu finden, über der sie äquivalent sind, so daß dann äquivalent umgeformt werden kann. Die umfassendste derartige Lösungsgrundmenge ist im genannten Fall die Differenzmenge

gegebene Grundmenge für die [illegible] $\setminus$ { Nullstellen aller Nenner, die die Gleichungsvariable enthalten }

Dasselbe Problem tritt auch bei Additionen von Bruchtermen auf sowie bei Divisionen durch Terme, die die Gleichungsterme enthalten.

Keinesfalls aber darf man sich bei der Aufgabenstellung 3 auf diese Probleme beschränken, da das Bilden der Differenzmenge leicht zum Formalismus werden kann. Es sind deshalb unbedingt auch Aufgaben folgender Art zu üben:
"Gib eine Lösungsgrundmenge an, über der $x = -5$ und $a = \frac{1}{2}$ äquivalente Gleichungen sind". Diese Aufgabe aus 7/VIII war schwieriger als die üblichen Aufgaben der Aufgabenstellung 3, da es nicht nur darum ging, etwa eine Lösung der einen Gleichung [illegible], Schüler noch wissen mußte, daß bezüglich der gleichen Lösungs-

grundmenge nicht erfüllbare Gleichungen ebenfalls äquivalent sind [illegible]
15 % (2. Versuch, 59 Schüler) die Aufgabe [illegible].

In der Abschlußarbeit 10/II (2. Versuch, 55 Schüler) wurde zu diesem Problem die folgende Aufgabe gestellt: "Finden Sie eine Lösungsgrundmenge, über der $x^2 = 4$ und $x = 2$ äquivalente Gleichungen sind". Hier fanden 73 % der Schüler die richtige Lösung.

Schlußfolgerung: Die Erledigung des ersten Schrittes der Handlungsvorschrift H_1 zeigt ein besseres Bild als die zuletzt genannten Einzelaufgaben zur Aufgabenstellung 3 (Vgl. Tabelle 43). Man sollte aber wie schon betont, nicht verkennen, daß bei ausschließlicher Behandlung der Aufgabenstellung 3 als Teilaufgabe von H_1 [illegible]. Die angeführten Aufgaben zeigen deutlich, daß der Aufgabenstellung 3 in der an zweiter Stelle genannten Form zu wenig Beachtung geschenkt wurde. Man sollte solche Aufgaben in Zukunft stärker berücksichtigen.

[illegible]

Für das Lösen der Aufgabenstellung nach Strukturbild IV liegt [illegible]

[illegible] Bruchgleichungen ohne [illegible] [illegible] der 8., 9. und [illegible] Klassen [illegible] Handlungsvorschrift [illegible] ge- schieht [illegible] Schülerarbei- ten.

Wir beschränken uns in der Tabelle 43 auf die Teilergebnisse der Handlungsvorschrift H_1 (im folgenden "Lösungsschritte" genannt) (Vgl. [illegible]) [illegible] gezeigt werden soll. [illegible]

Zur [illegible] für sich untersucht werden.

Lösungsschritt (1) (Vgl. Abb. 12) : Dabei fallen besonders die schlechten Leistungen bei 8/II 3. und 9/III/IV 1. in beiden Versuchen auf und weiterhin bei 9/II 2. im 1. Versuch bzw. bei 9/III/IV 3 im 2. Versuch.

Um die Ursachen für diese Fehlleistungen aufdecken zu können, wird auf die einzelnen Tätigkeiten, die nacheinander auszuführen sind, zurückgegangen. Es sind dies

a) die Tätigkeit T_2, dh. das Angeben der Lösungsgrundmenge aus der gegebenen Variablengrundmenge, evtl. durch Bilden einer Differenzmenge, die die Nullstellen aller Nenner mit der Gleichungsvariablen nicht enthält, und

b) die Tätigkeit T_1 zusammen mit T_3, dh. das Angeben der Lösungsmenge in Mengenschreibweise unter Verwendung der gegebenen Gleichung als definierender Relation.

Die Bewältigung [illegible] Schwierigkeiten bei b). Die Schwierigkeiten bei a) entstanden im allgemeinen nicht durch [illegible] bestimmen, sondern durch fehlerhafte Angabe der auszuschließenden Zahlen.

Die meisten Fehler entstanden bei den Aufgaben 8/II 3., 9/III/IV 1. (1. Versuch), bei der Aufgabe 8/II 3. (2. Versuch) und 9/III/IV 3., [illegible] daß negative ganze Zahlen [illegible] Lösungsgrundmenge nicht ausgeschlossen zu werden brauchen. Dieser Fehler war übrigens bei 9/VII 2. und 10/I 2. im wesentlichen beseitigt.

Die extrem schlechten Ergebnisse bei 9/III/IV 1. (1. und 2. Versuch) [illegible] Schülern die [illegible]

Schlußfolgerungen

1) Da die Gefahr besteht, daß die Schüler die Angabe der Lösungsgrundmenge zu formal handhaben, sind Aufgaben wie 8/II 3. unbedingt in die Übungsaufgaben aufzunehmen. Auch mangelhafte Kenntnisse über die Zahlbereiche bzw. spezielle Zahlenmengen können die Ursache für die oben genannten Fehler sein. Aus diesem Grund ist die Variablengrundmenge häufig zu var[illegible]

Um den bei 9/III/IV 1. aufgetretenen Fehler auszurotten, sind Durchgleichungen, bei denen die Gleichungsvariable als Faktor eines Nenners oder als Nenner auftritt, besonders zu berücksichtigen. Man sollte dabei auch [illegible] bei denen ein Nicht-Ausschließen der Null unbedingt zu einem falschen Endergebnis führt, wie z.B.

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{x-2}$$

(Man vergleiche dazu auch Kap. 3.4.2.)

Lösungsschritt (2) (Vgl. Abb. 13) : Hierbei gab es außer bei 8/II 3. (1. Versuch) und evtl. 9/III/IV 2. (1. Versuch) keine ernsthaften Schwierigkeiten. Zu diesem Lösungsschritt gehören

a) die Bestimmung des Hauptnenners
b) die Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit dem Hauptnenner und
c) ein evtl. nötiges Auflösen von Klammern.

Diese Tätigkeiten gehören alle zur komplexen Tätigkeit S_7.

Die Schwierigkeiten bei 8/II 3. beruhten beim 1. Versuch und zum Teil auch noch beim 2. Versuch auf Fehlern bei der Anwendung der binomischen Formel (siehe c)). Sie waren bei 9/II 2. im wesentlichen überwunden, weil die binomischen Formeln in der 8. Klasse von den Schülern mit mehr Sicherheit gehandhabt werden.

Bei 9/III/IV 2. handelte es sich ebenso wie bei 9/III 2. und 10/I 2. um Nenner der Form αx [illegible] $\alpha \in C$. Die Schwierigkeiten [illegible] ergaben sich dann im weiteren erheblich Rechenschwierigkeiten. Beim 2. Versuch [illegible]

Schlußfolgerung: Dieser Lösungsschritt bereitete im allgemeinen [illegible] beim 2. Versuch wenig Schwierigkeiten. - Bei der Hauptnennerbestimmung [illegible] Nenner der Form $\alpha x - \alpha a$; $\alpha \in$ [illegible] nicht [illegible]

Lösungsschritt (3) (Vgl. Abb. 14) : Zum Verständnis der Tabelle 43 sei noch gesagt, daß bei (3) eine [illegible] Lösung wie bei (2) möglich ist, da ein Schüler durchaus mit einer Gleichung [illegible] Auflösen von Klammern entstanden [illegible]

[illegible] richtig weiterrechnen kann.

Untersucht man die Ursachen für schlechte Leistungen bei diesem Lösungsschritt, der die Ausbildung der Fähigkeiten a) M_4 und b) [illegible]
Es gab nur Fehler, die zur Fähigkeit S_7 gehören. Sie beruhen auf Fehlern bei der Anwendung der Umformungsregeln 1 bis 3 oder der [illegible] den Fehleranalysen [illegible] diese Fehler entnehmen.

[illegible] vom 1. zum 2. Versuch bei den Aufgaben 9/VI 2. und 9/VII 1. aus Fehlern bei der Anwendung der Lösungsformel für die quadratischen Gleichungen. Dafür wiederum gab es folgende Ursachen: Beim 2. Versuch war zu [illegible] übergegangen worden, ohne [illegible] an Hand von [illegible].

Schlußfolgerung: Die relativ guten Ergebnisse beim 1. Versuch hatten [illegible] beim 2. Versuch geführt, indem dort zu schnell zu komplizierten Fragen übergegangen wurde. [illegible] sicher beherrscht werden, darf man in die Aufgaben zusätzliche Schwierigkeiten (Brüche, Klammern, usw.) einbauen. Dieser methodische Grundsatz von allgemeiner Bedeutung war hier bei der Stoffbehandlung verletzt worden.

[illegible] Beschränkung auf die vier Lösungsschritte wurde die explizite Ausführung der Probe nicht einbezogen.
Die Ergebnisse für beide Teile der Probe lassen sich gesondert aus allen Fehleranalysen ablesen.

Es werden also unter (4) die Fähigkeiten a) S_3 zusammen mit G_5 (Lösen einer einfachsten Gleichung bezüglich einer Lösungsgrundmenge) und b) S_3 (Entscheiden über die Erfüllbarkeit, hier der [illegible]) untersucht.

[illegible]

[illegible]

Wie man der Tabelle 43 bzw. der Veranschaulichung zu Schritt (4) entnimmt, traten vor allem bei 8/II 3., 9/II 2. und 9/VII 2. beim 1. Versuch Schwierigkeiten auf. Es handelte sich in allen drei [illegible] die identisch mit 9/VII 2. war, waren die Schwierigkeiten zum Teil überwunden worden.

Beim 2. Versuch konnten dann durch eine konsequente Einbeziehung von allgemeingültigen Gleichungen vor allem auch in Übungen zum [illegible] aufgeben [illegible]

[illegible] war im wesentlichen eine Folge der schlechten Leistungen beim Lösungsschritt (3).

[illegible] großer Unterschied zwischen den Leistungen bei den Schritten (3) und (4). Die Fehler [illegible] heißt, [illegible] im Verlauf des [illegible] sollen, damit die [illegible]

[illegible]

[illegible] schritte, wie sie oben exemplarisch vorgenommen wurde, ist eine Veranschaulichung aller vier Lösungsschritte für die einzelnen Aufgaben [illegible] sofort den Schwerpunkt der Fehler. Außerdem ist mit ihrer Hilfe ein Vergleich sowohl innerhalb des jeweiligen Versuches als auch vom 1. zum 2. Versuch gut möglich.

7.4. [illegible]

Es wurde auf die Auswertung für die Strukturbilder II a, III und V deshalb so ausführlich eingegangen, um an einigen Beispielen zu demonstrieren, wie sich der Lehrer durch eine lang-

fristige und planmäßige Auswertung nach Problemkomplexen auf der Grundlage von Fehleranalysen in jeder Phase des Lehrgangs einen guten Überblick über den Leistungsstand verschaffen kann, indem [illegible] bis zu den einzelnen Tätigkeiten hin verfolgt.

[illegible] eben dar- [illegible] als auch für die Vergleichsklassen. Wir verzichten jedoch auf die Wiedergabe, da wir meinen, daß das Wesentliche des Anliegens aus den angeführten Beispielen hervorgeht.

Die Methode, von den Fehleranalysen der einzelnen Arbeiten aus- [illegible] in Form der ange- [illegible] der vorliegenden Untersuchungen bewährt. Die graphische Veranschaulichung erwies sich vor allem nach dem 1. Versuch als gute Grundlage für den 2. [illegible] von Tabelle und graphischer Darstellung während der Untersuchungen ermöglichte eine [illegible] und davon ausgehend eine gute Steuerung der weiteren Arbeit.

Deshalb erscheint es uns lohnend, auch für andere Stoffgebiete in der eben beschriebenen Weise vorzugehen. Über die Arbeit mit Fehleranalysen schlechthin werden auch dort sicher Erfahrungen vorliegen, die man, so meinen wir, durch zusätzliche Auswertungen nach Problemkomplexen ergänzen sollte, um die Aneignung der einzelnen Tätigkeiten besser verfolgen und lenken zu können.

[illegible] Zur Auswertung der Arbeitsgemeinschaft

[illegible] der Arbeitsgemeinschaft 8. Klasse (Vgl. [illegible] für die [illegible]

Es wurden acht schriftliche Leistungskontrollen durchgeführt. Wegen der geringen Anzahl der Teilnehmer war es möglich, neben den üblichen Fehleranalysen für die einzelnen Arbeiten, Fehleranalysen für jeden einzelnen Schüler anzufertigen. Das ermöglichte gezielte individuelle Hilfen in Form zusätzlicher Aufgaben

oder individuelle Erklärungen durch den Lehrer.

Eine solche "persönliche Fehleranalyse" sah folgendermaßen aus:
(Die angeführten Arbeiten befinden sich im Anhang.)

Thomas Kothes, 8 b ; 37.03 ; Endzensur der 7. Klasse: 1

Aufgabe / Arbeit	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
AG/I	/	über R untersucht	über R untersucht	/	/	/	/	/
AG/II	/	[illegible] rechnung	/	[illegible]	/	/		
AG/III	/	/	[illegible]	/	/	/		
AG/IV	/	/	/	/				
AG/V	/	/		/	/			
AG/VI	/	/		/				
AG/VII	/	Vereinigungsmenge falsch	/	Vereinigungsmenge falsch				
AG/VIII (6 Teilaufgaben)	//// ////	[illegible]	/	/	$\|a\| > 0$	/	nicht gerechnet	/

Bei diesen Fehleranalysen wurde so vorgegangen, daß die Art des Fehlers, also die Ursache für das fehlerhafte Lösen der jeweiligen [illegible] Ergebnis wurde ein senkrechter Strich eingetragen. Bei einer so geringen Schülerzahl wie der vorliegenden ist ein solches Verfahren hinreichend übersichtlich.

Soll die Arbeit mit persönlichen Fehleranalysen im Klassenverband durchgeführt werden, so empfiehlt es sich, die auftretenden [illegible] "Fehlermodelle" einzuordnen, etwa in der Form, wie sie E. Beer in /5/ angibt. Im Gegen-

satz zu Beer wurden in unserem Falle die persönlichen Fehler- [illegible] angefertigt. [illegible] Beer etwas verschieden.

Von den Fehleranalysen für die einzelnen Leistungskontrollen der AG sollen hier nur die für die Eröffnungs- und für die Abschlußarbeit angegeben werden. Auf eine Umrechnung in Prozent wird verzichtet, da kein Vergleich durchgeführt wird.

[illegible] (9 Schüler)

[illegible]	Anzahl der richtigen Ergebnisse
1.	[illegible]
2.	[illegible]
3.	[illegible]
4.	[illegible]
5.	[illegible]
6.	[illegible]
7.	[illegible]
8.	[illegible]

AG/VIII (9 Schüler)

Nr. der Aufgabe	Anzahl der richtigen Ergebnisse
1 a	7
1 b	3
1 c	6
1 d	7
1 e	6
1 f	6
1 g	6
1 h	6
2.	5
3.	6
4.	8
5.	3
6.	3
7.	6
8.	6

[illegible] geht hervor, daß [illegible] der Kenntnisse ~~auf der~~ auf der Grundlage des Strukturbildes II b (Aufgaben 5., 6., 7. und 8.) gut, hinsichtlich der Aufgabenstellungen des Strukturbildes III dagegen weniger gut war.

[illegible] sowohl im Umgang [illegible] Durchschnitt und [illegible] der neuen Gleichungs- und Ungleichungs[illegible] Kenntnisse gezeigt wurden.

Im Falle von AG/I 2. und 3. und AG/VIII 5. und 2. soll einiges zu den Ursachen für die fehlerhafte Erledigung der Aufgaben gesagt werden.

Bei AG/I 2. und 3. entnimmt man den persönlichen Fehleranalysen als einzige Ursache, daß die Schüler von den Lösungsmengen bezüglich R ausgingen und aus ihrer Verschiedenheit schlossen, daß es keine Lösungsgrundmenge mit der gesuchten Eigenschaft geben kann. Diese Aufgabenstellung tauchte später im Verlauf der Arbeitsgemeinschaft noch mehrmals in mündlichen Leistungskontrollen auf und konnte dann stets richtig gelöst werden.

Bei AG/VIII 5. war die einzige Ursache darin zu suchen, daß $|a| > 0$ nicht beachtet wurde.

Im Falle von AG/VIII 2. wurde die Aufgabe von 2 Schülern gar [illegible] beiden Fällen wurde die fortlaufende Ungleichung nur zur Hälfte richtig angegeben.

Entsprechend lassen sich die Ursachen für alle auftretenden Fehler aufdecken.

Die obigen Ausführungen sollten nur das Prinzipielle des Vorgehens [illegible] auch die Fehleranalysen zu den übrigen Leistungskontrollen ein ähnlich positives Bild wie die zu AG/I und AG/VIII.

[illegible] sich einschätzen, daß [illegible] begonnen hatten, diese auch erfolgreich zu Ende führten. Der größere Teil der [illegible] Kenntnissen und Arbeitsmethoden auch Fähigkeiten im selbständigen Anwenden von [illegible], die über die im Lehrgang [illegible], daß keiner der Schüler [illegible] auf eine gute Arbeitsatmosphäre hin und zum anderen auf ein gut gewähltes Ni- [illegible], wie ver- [illegible] die drei besten Schüler noch erheblich steigern können !

[illegible] selbst gewachsen war und zweitens, daß sie besondere Freude an

der gewählten Arbeitsmethode gefunden hatten, die durch Anleitung zu selbständigem Problemfinden und Problemlösen das Selbstvertrauen zu heben vermochte.

Für die vorliegenden Untersuchungen war die Arbeitsgemeinschaft eine nützliche Ergänzung und diente dem Sammeln von Erfahrungen für den Lehrgang 9. Klasse. Die Arbeitsgemeinschaft zeigte einerseits, daß bei den Begriffen Durchschnitt und Vereinigung, die im darauffolgenden Schuljahr in der 9. Klasse einzuführen waren, kaum Schwierigkeiten zu erwarten [illegible] das vollständige Lösen von linearen Ungleichungen mit einer Variablen und die Behandlung von [illegible] Beträgen durchaus auch in den normalen Unterricht einer 7. bzw. 8. Klasse aufnehmen könnte [46]. Für lineare Ungleichungen mit absoluten Beträgen bzw. diophantische Gleichungen gilt das nur sehr bedingt, da dort der Aufwand zu groß ist. Doch sollten einzelne Beispiele durch inhaltliche Überlegungen gelöst werden und als Verallgemeinerung bekannter Sachverhalte bzw. als Ausblick nicht fehlen.

Aus Zeitgründen war eine Wiederholung der Arbeitsgemeinschaft [illegible] durch inhaltliche und methodische Veränderungen nichts ausgesagt werden kann.

5. Schlußfolgerungen

5.1. Zum Inhalt und Umfang des Stoffes

[illegible] Klassen 6 bis 8 /71/ und 9 bis 10 /72/ zeigen, waren Stoffinhalt und Stoffumfang der Untersuchungen [illegible] gewählt, daß man mit Recht von Vorarbeiten für die Durchsetzung dieser Lehrpläne sprechen kann. Dort, wo die Untersuchungen über die genannten inhaltlichen Lehrplananforderungen hinausgingen (u.a. Differenzmenge, Produktmenge, [illegible] [illegible] direkt anbietet und fördernd für das mathematische Verständnis der Schüler ist.

Dabei wird vorausgesetzt, daß ihre Anwendung nicht auf die Gleichungslehre beschränkt bleibt und daß man einer nur formalen Handhabung entgegenwirkt.

Die Untersuchungen blieben an anderer Stelle, nämlich bei der [illegible] hinter den [illegible] Lehrplananforderungen zurück. Wenn auch in den Untersuchungen im Zusammenhang [illegible] auch mit Ungleichungen gearbeitet wurde, so fehlte doch eine systematische Behandlung und Anwendung der Umformungsregeln für Ungleichungen. [illegible] gegeben.

Die starke Akzentuierung der begrifflichen Seite im Zusammenhang mit den Problemkomplexen auf der Grundlage der Strukturbilder konnte, wie die Auswertung zeigt, im allgemeinen zu einem sicheren Umgang mit den Begriffen und einer richtigen Ausführung der entsprechenden Tätigkeiten führen.

Die Fähigkeit, die Zusammenhänge zwischen den Begriffen und [illegible] zufriedenstellend entwickelt werden. Wenn man dazu z.B. die Auswertung der Abschlußarbeit der 10. Klassen, Versuchsklassen [illegible] als Beleg heranzieht, so ergibt sich folgendes Bild:

Nr. der Aufgabe	Aufgabenstellung (gekürzt)	Anzahl der richtigen Ergebnisse in %
[illegible]	Die Gleichung [illegible] mit einer Variablen, erfüllbar, aber nicht allgemeingültig über N	89
[illegible]	[illegible] einer Variablen, nicht erfüllbar über N	87
[illegible]	[illegible] allgemeingültig über N	78
[illegible]	Sind $\frac{1}{4}a + \frac{1}{2} = 0$ und $3x + 4 = -2$ über G äquivalent oder nicht ?	89
[illegible]	Zu $3x + 5 = 8$ ist eine über N [illegible] anzugeben	96

[illegible]	Es ist eine Lösungsgrundmenge anzugeben, über der $x^2 = 4$ und $x = -2$ äquiva- [illegible]	33
[illegible]	$3 \in [3;4]$ [illegible] falsch ?	89
	$3 \in \{3,4\}$ wahr oder falsch ?	96
[illegible]	Bei welchem Gleichungstyp ist $L_1 = \{[3;4]\}$ möglich ?	58
	Bei welchem Gleichungstyp ist $L_2 = \{3;4\}$ möglich ?	71
[illegible]	Gleichung, die über N $L = \{3;4\}$ hat	62
[illegible]	Gleichung, die $[3;4]$ als Lösung hat	31
[illegible]	Ist $L = \{0; -1\}$ die richtige Lösungsmenge für die Gleichung $\frac{x}{x-2} = \frac{x}{x(x-2)} - \frac{2}{x-2}$; $x \in G$?	85
	Begründung ?	75
[illegible]	Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + px + q = 0$; $x \in R$; $p, q \in R$; x Gleichungsvariable	78
[illegible]	Spezielle Gleichung aus dieser Klasse	69
	Lösungsmenge der speziellen Gleichung	69
[illegible]	p ist so zu wählen, daß $L = \{0; -4\}$	[illegible]
	Probe	80
[illegible]	Lösungsgrundmenge derart angeben, daß jede Gleichung aus dieser Klasse nur eine reelle Lösung hat	41

[illegible] aus den Problemkomplexen zu den [illegible] ; III (2a,b,c) II a (3c,d) ; I a (4) und VI (5a,b,c,d).

Bis auf 2c, 3d und 5d wurden, wie man sieht, die Aufgaben [illegible] gut erledigt. Das schlechteste Ergebnis - bei 3d - re[illegible] übrigens daraus, daß viele Schüler fälschlicherweise

...system mit der Lösungsmenge L = $\{[3;4]\}$ ange... also eine kompliziertere Aufgabe als die geforderte rich...

Als nächstes soll etwas zum Verhältnis zwischen dem Bemühen um begriffliche Klarheit und der Herausbildung sicherer Fertigkeiten beim Anwenden der Umformungsregeln, Lösungsformeln und Lösungsverfahren gesagt werden.

Durch die gehäufte Einführung neuer Begriffe und die damit verbundenen Zeitschwierigkeiten zu Beginn der Untersuchungen 7. Klasse – die im Lehrplan vorgesehene Stundenzahl war so wenig wie möglich zu überziehen – lag die Gefahr nahe, daß die Anwendungen der Umformungsregeln zu wenig geübt wurden. Die schlechten Leistungen, die in der Kontrollarbeit 7/V bei den Aufgaben 2., 3. und 4. vor allem im ersten Versuch auftraten,

			4. (2. Gleichung)
...	...	...	28 %
...	...	...	72 %

waren hier eine erste Warnung. Sie wurde sofort beachtet, so daß im weiteren Verlauf der Untersuchungen im allgemeinen von einem richtigen Verhältnis zwischen Aufgaben zur Klarstellung begrifflicher ... und solchen zum Erwerb von Fertigkeiten beim Lösen von Gleichungen gesprochen werden konnte.

... Gleichungslehre

... Zur Situation in den Versuchsklassen

... 7. Klasse ... Relationen. Die Schüler lernten die Lösungsmenge einer Gleichung $G(x)$ mit einer Variablen x bezüglich der Lö-

[illegible] in der Form

$$L = \{x \mid x \in L_g \wedge G(x)\}$$

[illegible] $G(x,y)$ mit zwei Variablen x und y [illegible] in der Form

$$L = \{[x;y] \mid [x;y] \in L_g \wedge G(x,y)\}$$

[illegible] vorgenommen wurde, um alle Lösungen ablesen zu können.

Eine so weitgehende Anwendung der mengentheoretischen Symbolik ist in den neuen Lehrplänen /71/ und /72/ nicht vorgesehen, wäre aber, wie die vorliegenden Untersuchungen zeigen, durchaus möglich und auch zweckmäßig.

Es gelang im Verlauf der Untersuchungen, alle Schüler zu einer weitgehend sicheren Handhabung dieser Symbolik zu führen. Sie wurde nicht als leerer Formalismus, sondern als eine "Kurz- [illegible] tischen Sachverhaltes erkannt und gehandhabt. Waren zu Beginn der Untersuchungen vor allem bei schwächeren Schülern noch mehrfach fehlerhafte Schreibweisen aufgetreten, so läßt sich an Hand [illegible] Fehler bereits in der 8. Klasse nur noch vereinzelt vorkamen. Auch sol- [illegible] zwischen $[a;b]$, $\{a;b\}$ und $\{[a;b]\}$ [illegible]. Einige Unsicherheiten [illegible] eines Gleichungssystems auf, dessen Gleichungen linear abhängig waren. Die Ursache lag darin, daß dieser Sachverhalt zu selten in schrift- [illegible].

Auch die Elementbeziehung "$\in$" wurde nach kurzer Zeit richtig gehandhabt. Die Gefahr einer Verwechslung des Zeichens "$\in$" [illegible] Teilmengenbeziehung nicht explizit eingeführt wurde und somit immer für jedes einzelne Element das Enthaltensein überprüft werden mußte. Dieses Vorgehen brachte in diesem Zusammenhang Vorteile, ist aber ansonsten, wie schon erwähnt, nicht zu empfehlen.

Ein selbständiges, sinnvolles Übertragen der mengentheoretischen Symbolik [illegible] wurde von guten Schülern ohne Schwierigkeiten vorgenommen. Die-

se Feststellung gründet sich auf eine Vielzahl von Hospitationen vor allem in schulpraktischen Übungen in den Versuchsklassen.

Auch das Erfassen und die mündliche Wiedergabe von Sachverhalten der Gleichungslehre, die in formalisierter Sprache, speziell [illegible] der mengentheoretischen Symbolik dargestellt werden, [illegible] wenig schwierig. [illegible], kommt es hierbei vor allem darauf an, von der ersten Stunde an konsequent auf eine korrekte Ausdrucksweise zu achten und die mündliche und schriftliche Darstellen nicht losgelöst von einander, sondern als eine Einheit zu behandeln.

Die Verwendung der mengentheoretischen Symbolik erwies sich nach unserer Meinung als eine gute Grundlage und Hilfe für die sprachliche Erziehung der Schüler und für die Erziehung zum richtigen Umgang mit der mathematischen Fachterminologie. Die vielfältigen [illegible] verhinderte dabei eine Uniformierung der Sprache. Die Schüler der Versuchsklassen konnten zu einer [illegible] Beherrschung der mathematischen Fachterminologie befähigt werden als Schüler anderer Klassen. Das wurde durch eigene Hospitationen und solche von Kollegen Mathematiklehrer und ferner in den schriftlichen Abschlußprüfungen 10. Klasse der Schüler der Versuchsklassen bestätigt.

Zur [illegible] ist folgendes zu sagen: Da in dieser Klasse neben dem Lehrbuch für die Vorbereitungsklasse [illegible] /74/ [illegible] Unterrichtsversuche eingesetzt wurde, [illegible] Verwendung der mengentheoretischen Symbolik erforderlich, als sie im Lehrplan /70/ und im Lehrbuch vorgesehen war. Anfänglich traten dabei wegen der Häufung der neuen Begriffe und Symbole ähnliche Schwierigkeiten wie in den Vergleichsklassen des 2. Versuchs (Vgl. Kap. 5.2.2.) auf. [illegible] als dort überwunden werden. Alle Schüler gelangten spätestens Mitte der 9. Klasse zu einer sicheren Handhabung der mengentheoretischen Symbolik und Terminologie.

5.2.2. Zur Situation in Vergleichsklassen

In den Vergleichsklassen des 1. Versuchs unterrichteten andere Fachkollegen als in den Versuchsklassen. Die Stoffbehandlung erfolgte vollkommen "traditionell" auf der Grundlage des gültigen Lehrplans. Die Leistungen dieser Klassen erwiesen sich bei der statistischen Auswertung der Ergebnisse der Kontrollarbeiten, die zum Vergleich herangezogen wurden, als signifikant schlechter als die der entsprechenden Versuchsklassen.

Vergleichbare Fortschritte bei der sprachlichen Darstellung traten nicht auf. Die schriftliche Darstellung in den Kontrollarbeiten mußte in den Vergleichsklassen wegen Schwierigkeiten bei der Formulierung gewisser Sachverhalte unzureichend bleiben.

In den Vergleichsklassen des 2. Versuchs unterrichteten dieselben Kollegen wie in den zugehörigen Versuchsklassen. Dieser Umstand erwies sich für einen Leistungsvergleich als problematisch.

Auch in den Vergleichsklassen des 2. Versuchs sollte der Unterricht wieder in vollkommen "traditioneller" Form erteilt werden. Abweichend von dieser ursprünglichen Konzeption unternahmen aber die beiden Kollegen verständlicherweise bald den Versuch, neben inhaltlichen Elementen der mengentheoretischen Auffassung der Gleichungslehre auch teilweise die Symbolik der Mengenlehre nachträglich einzuführen. Es wurden also der Begriff Menge bzw. Lösungsmenge und die Mengenbeziehung verwendet und gleichzeitig die Mengenschreibweise in aufzählender Form sowie das Zeichen "∈" und ebenso bestimmte Bezeichnungen für einige spezielle Zahlenmengen.

Trotz der zwei- bzw. dreijährigen methodischen Erfahrungen bei der mengentheoretischen Behandlung der Gleichungslehre, die diese Kollegen inzwischen gesammelt hatten, erwies sich der Weg der Vergleichsklassen als problematisch. Viele Schüler übernahmen die oft etwas am Rande vermittelte Symbolik recht formal. So traten z.B. gehäuft Verwechslungen der Schreibweisen von Lösungsmengen von quadratischen Gleichungen und von Gleichungssystemen auf. Auch die [illegible] mel. Dieser Zustand konnte erst Ende der 9. Klassen bzw. zum Teil in den 10. Klassen einigermaßen überwunden werden.

Man kann also schlußfolgern, daß die Einführung der mengentheo-

retischen Symbolik und Terminologie nur dann zweckmäßig und fördernd ist, wenn sie - wie in den Versuchsklassen - über einen längeren Zeitraum hinweg mit Konsequenz erarbeitet und benutzt wird. Andernfalls kann sie vor allem bei schwächeren Schülern zu einem leeren Formalismus werden.

Trotz dieser kritischen Einschätzung darf man aber andererseits nicht verkennen, daß beim 2. Versuch abweichend vom 1. [illegible] noch ein signifikanter Unterschied zwischen den Leistungen der Versuchs- und Vergleichsklassen in den Kontrollarbeiten nachgewiesen werden konnte, nicht mehr aber für die 10. Klassen. (Vgl. 4.2.2.2.).

Vers[illegible] Unterrichtsversuche der Behandlung der Gleichungslehre auch in anderen als den [illegible] Vergleichsklassen gekennzeichneten [illegible] Beachtung geschenkt. Dazu boten [illegible] Hospitationen in [illegible] Möglichkeiten. Es zeigte sich dabei immer wieder, daß eine [illegible] Mathematiklehrern, angeregt durch [illegible] und Literaturstudium, versucht hatte, den Unterricht durch Einführung der mengentheoretischen [illegible] zu "modernisieren". Leider erwies es sich aber in einer Vielzahl der Fälle, daß Modernisierung mit [illegible] worden war und daß gelegentlich auch bei den Kollegen der Überblick und der Einblick [illegible] noch nicht ausreichten, um eine [illegible] Behandlung zu garantieren.

So traten z.B. in der Schreibweise Fehler auf : Etwa wurde $L = \{\phi\}$ für die leere [illegible] $\{3;4\}$ oder $L = [3;4]$ bei Gle[illegible] für die Lösungsmenge und $x = \{0,1,2,3\}$ für die [illegible] geschrieben. Außerdem traten falsche Sprechweisen auf wie z.B. "Die Menge 3,4" und anderes [illegible].

Es zeigte sich [illegible], daß Kollegen zum Zeitpunkt der Behandlung [illegible] noch keine genauen Vorstellungen über die [illegible] der mengentheoretischen Betrachtungsweise beim [illegible] Fälle, [illegible] plötzlich [illegible] Gleichungslehre [illegible].

trachtungsweise zu übertragen. So kam es z.B., daß in einer Klasse, in der die Schüler noch nie etwas über Mengen gehört hatten, plötzlich angewiesen wurde, die "Lösungsmenge" eines Systems von zwei linearen Gleichungen mit zwei Variablen in der Form [illegible] eine Erweiterung, die natürlich unter diesen Bedingungen nur formal erfüllt werden konnte. Als man die Schüler befragte, wie sie die Lösungsmenge einer linearen Gleichung mit zwei Variablen angeben würden, erklärten sie [illegible] menge gar nicht gäbe.

Die Aufzählung solcher und anderer Fehler ließe sich fortsetzen. In unserem Zusammenhang reicht die Feststellung, daß eine [illegible] ablehnen ist, da sie mehr schadet als nützt. Es geht um eine inhaltliche [illegible] nicht Selbstzweck, sondern nur Mittel zum Zweck sein kann. Es ist eine wichtige Aufgabe für die Lehrerweiterbildung, die hohe Bereitschaft und die vielfältigen ernsten Bemühungen von Mathematiklehrern um eine Modernisierung ihres Unterrichtes durch qualifizierte Anleitungen in die richtigen Bahnen zu lenken.

5.3. Zur [illegible] des Unterrichtes

5.3.1. Zu Zielvorstellung und Leitprinzipien

Die Zielvorstellung und die Leitprinzipien haben sich als brauchbare Orientierungsgrundlage für den Gesamtlehrgang erwiesen. Vor allem das Bewußtmachen der allseitigen Zusammenhänge zwischen den Begriffen und Aussagen und das gleichartige Vorgehen bei jedem neuen Gleichungstyp und das Hinarbeiten auf durchgängige Handlungsvorschriften haben die Schüler in zunehmendem Maße befähigt, bei neuen Gleichungstypen selbständig den [illegible] erfolgreich [illegible] gegriffen und Aussagen [illegible] sie [illegible] und [illegible]

Die wichtige Rolle der Gleichungslehre für andere Stoffgebiete und für die Praxis wurde stets durch Textaufgaben verdeutlicht. Zur Frage des Ansatzes von Textaufgaben erfolgten keine besonderen Untersuchungen und Messungen. Zu drei weiteren Problemen, die bei Textaufgaben auftreten, soll jedoch näher gesagt werden. Dabei ging es uns um die Herausarbeitung des Unterschiedes zwischen Variablen für Größen und solchen für Zahlen [47]. Dieser Unterschied wurde zwar ständig bei den Textaufgaben beachtet, ist aber den Schülern doch nicht so klar und bewußt geworden, daß sie ihn auch in anderen Stoffgebieten, z.B. bei der Satzgruppe des Pythagoras, bewußt beachtet hätten. Das mußte wiederholt in schulpraktischen Übungen beobachtet werden, die die Studenten in den Versuchsklassen durchführten.

Zweitens ging es uns um die richtige Durchführung der Probe. Hier kann man es nur positiv werten, daß die Probe am Text in den Unterrichtsversuchen zu einem allgemein beachteten Prinzip geworden war.

5.3.2. Zur Lernhaltung in den Versuchsklassen

Rückblickend muß man als Mangel konstatieren, daß Zielvorstellung und Leitprinzipien keine Richtlinien für die erzieherische Arbeit enthielten. Dieser Mangel wurde zwar in der Praxis durch die gemeinsame Arbeit der Unterrichtenden weitgehend aufgehoben, bleibt aber für die theoretische Fundierung des Lehrgangs trotzdem bestehen.

Die Schüler aller Versuchsklassen besaßen mit wenigen Ausnahmen eine ausgesprochene gute Lernhaltung im Fach Mathematik. Ihre Einstellung zur Mathematik kann im Test durchweg als positiv bezeichnet werden. Im Verlauf der Untersuchungen zeigte es sich verschiedentlich auch, daß bei leistungsschwachen Schülern das Interesse durch Erfolge geweckt werden konnte, bei denen es mehr auf das Verständnis von Zusammenhängen auf der Grundlage der Strukturbilder und weniger auf schematisierte Rechnungen ankam. Solche Schüler zeigten sich z. B. oft recht findig und sachkundig, wenn es darum ging, Gleichungen mit geforderten Bedingungen aufzustellen oder geeignete Lösungsgrundmengen zu finden, sie resignierten aber schnell, wenn sie sich beim Umgang mit Umformungs-

regeln und Lösungsverfahren in Rechenfehlern festgerannt hatten. In diesen Fällen waren die Ursachen seltener in einem Nichtbeherrschen der Regeln und Verfahren der Gleichungslehre zu suchen als in Schwierigkeiten, die aus früheren Stoffgebieten herrührten, und speziell beim Ausführen der Grundrechenoperationen mit rationalen bzw. reellen Zahlen auftraten. Das weisen die Fehleranalysen im Zusammenhang mit der Tätigkeit S_7 (Ausführen äquivalenter Umformungen von Gleichungen) immer wieder aus.

Die leistungsstärkeren Schüler konnten durch die vorliegende Behandlungsweise stärker gefördert werden als bei der traditionellen Art der Stoffbehandlung. Die erhöhten Anforderungen an das mathematische Denken wurden von diesen Schülern im allgemeinen als ein begrüßenswertes Gegengewicht zum Abarbeiten von Lösungsregeln und -verfahren empfunden. Das ging aus zahlreichen Einzelaussprachen, aus der guten Mitarbeit im Unterricht und aus der Arbeitsgemeinschaft hervor.

5.3.3. Zum Einsatz der methodischen Hilfsmittel

Unser Anliegen war es, den Untersuchungen gewissermaßen ein "methodisches Gerüst" unterzulegen, mit dessen Hilfe es einmal möglich sein sollte, die Entwicklung von speziellen Fähigkeiten zu unterstützen, indem die entsprechenden Tätigkeiten durch geeignete Aufgabenstellungen herausgebildet werden, und zum anderen damit auch eine Grundlage für die Auswertung der Untersuchungen zu schaffen. Da es im besonderen vor allem um die Fähigkeit ging, die wechselseitigen Beziehungen und Zusammenhänge zwischen den Begriffen und Aussagen und Methoden des Stoffgebietes Gleichungen zu durchschauen, haben wir die Strukturbilder und Handlungsvorschriften als methodische Hilfsmittel entwickelt. Sie sollen dem Lehrer eine Möglichkeit zeigen, die Entwicklung dieser Fähigkeit zu fördern. Dabei haben wir besonders zwei Aspekte ins Auge gefaßt. Einmal ging es um das Erkennen von Zusammenhängen zwischen den Begriffen und Aussagen des Stoffgebietes. Dazu dienten die Strukturbilder als Leitlinie für das Aufstellen entsprechender Übungskomplexe. Zum anderen sollten die Schüler an das Erkennen der Zusammenhänge zwischen den verschiedenen Lösungsmethoden [illegible] herangeführt werden. [illegible]

die Handlungsvorschriften.

Wir meinen, daß sich sowohl die Strukturbilder als auch die Handlungsvorschriften als geeignete methodische Leitlinien erwiesen haben. Weiterhin haben sie als nützliche Hilfen für die Auswertung gedient. Wir haben in den entsprechenden Kapiteln dazu Stellung genommen.

Ebenso wurde dargelegt, in welcher Weise die Handlungsvorschriften oder Teile davon direkt Eingang in den Unterricht fanden.

Wir meinen nach Abschluß der Untersuchungen und der Auswertung, daß man den Schülern sowohl die Strukturbilder als auch die Handlungsvorschriften H_1 und H_2 in der schematisierten Form in die Hand geben sollte und daß man H_{11}, H_{12} und H_{13} für Anschauungstafeln verwenden könnte. Der wiederholt von den Schülern geäußerte Wunsch nach weiteren Übersichten, über die im Lehrgang vermittelten hinaus, verstärkt noch diese Meinung. Hier liegen auch Ansatzpunkte für die Gestaltung von Lehrbüchern.

Untersuchungen über den unmittelbaren Einsatz der Strukturbilder und Handlungsvorschriften im Unterricht als Hilfsmittel für den Schüler stehen noch aus.

3.3.4. Zum Einsatz von Lehrmaterialien

Während es bei den Strukturbildern und Handlungsvorschriften im wesentlichen um [illegible] durch Intensivierung geht, sollen im folgenden Fragen der Effektivitätssteigerung durch Rationalisierung untersucht werden.

Das im Lehrgang eingesetzte Werkmaterial für den Schüler, das sich mit den im Verlauf der Untersuchungen angebrachten Ergänzungen im Anhang befindet, stellte einen, allerdings sehr knappen, Leitfaden dar. Wenn es auch nicht als vollwertiger Lehrbuchersatz zu werten ist, so bedeutete es dennoch eine Zeitersparnis, daß die [illegible]

Einen stärkeren Anteil an der Erhöhung der Effektivität des Unterrichtes hatten aber die Übungsblätter. Sie wurden in drei ver-

a) für alle schriftlichen Leistungskontrollen des gesamten Lehrgangs und der Arbeitsgemeinschaft

b) für Übungen und Hausaufgaben in der 7. Klasse

c) für die Wiederholung am Ende der 7. Klasse.

Dabei trugen vor allem b) und c) zu einer erheblichen Rationalisierung bei. Wegen des Fehlens eines Lehrbuches mit dem [illegible] Übungsblätter b) eine zwingende Notwendigkeit, um den Zeitplan einhalten zu können. Der Einwand, den eine Reihe von Mathematiklehrern im Verlaufe von Weiterbildungsveranstaltungen machten, daß nämlich im normalen Unterricht ohne Gebrauch zusätzlicher Hilfsmittel der gebotene Stoff der 7. Klasse nicht zu bewältigen gewesen wäre, ist sicher berechtigt.

Neben einer Rationalisierung des Unterrichtes wurde außerdem durch die laufende Kontrolle der Übungsblätter der Hausaufgaben [illegible] besserung erzielt. Die berechtigte Kritik der Schüler an der räumlichen Gestaltung einiger Übungsblätter wäre im Falle des [illegible]

Besonders das Material zur Wiederholung 7. Klasse fand den Beifall der Schüler. Sie arbeiteten gerne damit und betonten, daß sie sich derartige Übungsblätter auch für die Wiederholung anderer [illegible] wünschten. Dieses Übungsmaterials. Der Leistungsanstieg von [illegible] der Wiederholung) zu 7/VIII (Abschlußarbeit der Wiederholung) in beiden Versuchen (Vgl. Tab. 28 und 29) zeigte die positive Wirkung. Da kein Kontrollversuch ohne dieses Material durchgeführt wurde, ist keine Aussage darüber möglich, ob man in den acht zur Durcharbeitung der Übungsblätter verwendeten Unterrichtsstunden [illegible] ebenso viel oder mehr hätte erreichen können. Eines steht aber fest, daß eine derart intensive Beschäftigung mit einzelnen Schülern in diesem Falle nicht möglich gewesen wäre.

[illegible]danken zur Gestaltung von Lehrbüchern

Im Verlauf der Untersuchungen konnten wir eine Reihe von Erfahrungen sammeln, die uns als Anregungen für die Gestaltung künftiger Lehrbücher brauchbar erscheinen.

Zunächst sei einiges zur Perspektive gesagt.

Die Anforderungen an das Wissen und Können, die die sozia- [illegible] lich-technischen Revolution in ständig wachsendem Maße an jeden einzelnen Werktätigen stellt, erfordern neue rationellere und effektivere Formen der Wissensaneignung und Wissensspeicherung. Das muß sich auch in der Gestaltung der Lehrbücher der Zukunft widerspiegeln. Wir meinen, daß man dazu die traditionelle Form des Lehrbuches wird durchbrechen müssen. Ein Lehr- [illegible] darstellen. Es könnte etwa folgendermaßen aufgebaut sein.

Einer der Teile wäre [illegible] [illegible] Form die Zusammenhänge, Überblicke und Lösungen [illegible] r den einzelnen Stoffgebiete darbietet. Hier wär [illegible] ten Über Typen von Gleichungen und Lösbarkeitsfälle gehörten z.B. hierher. Der nötige verbindende Text müßte möglichst knapp [illegible] über das jeweilige Kapitel vermittelt würde. Unterricht und Wiederholung hätten damit eine Art "Fahrplan", mit dessen Hilf [illegible] Überblick über das Grundwissen verschaffen könnte.

[illegible] zweiter Teil eines solchen Lehrbuches würde die Definition [illegible] Umfang her würde es für das Stoffgebiet Gleichungen etwa Teile [illegible] "[illegible]materials" für die Schüler entsprechen. Von der Ge- [illegible]

[illegible] les. Hier sollten neben durchgerechneten "Musterbeispielen",

Aufgabenfolgen zur Erarbeitung neuen Stoffes und Übungskomplexen zur Herstellung von Zusammenhängen, ferner auch als "Zusatzaufgaben" gekennzeichnete Aufgaben erscheinen. Des weiteren sollte ein Grundstock an Übungsblättern für Übungen im Unterricht, für Hausaufgaben und Leistungskontrollen so enthalten sein, daß sie der Schüler bei Bedarf leicht aus dem Buch herauslösen kann, z.B. durch Perforation. Dem Lehrer müßten zu schneller Kontrolle Schablonen und ähnliche Hilfsmittel zur Verfügung stehen. Bei der inhaltlichen Gestaltung dieses Teils müßten u.a. solche methodischen Gedanken Pate stehen, wie wir sie im Zusammenhang mit den Strukturbildern und Handlungsvorschriften und im Kapitel 3.4. für Aufgabenfolgen und Übungskomplexe zum Kapitel Gleichungen entwickelt haben. Da sich die im Unterrichtsversuch in der 7. Klassen eingesetzten Übungsblätter gut bewährt haben, könnten auch sie weitere Anregungen liefern.

Es müßte weiterhin technisch möglich sein, Lehrbücher der oben genannten Form so zu gestalten, daß sie drei Teile getrennt werden können. Dann könnte sich der Schüler im Verlauf seiner Schulzeit selbst einen Grundriß und einen Nachschlagebehelf für den Gesamtstoff zusammenstellen. Den in vielfältiger Form von Kollegen angelegten Merkheften der Schüler liegen auch Gedanken der obigen Art zugrunde.

Um den Schüler in verstärktem Maße mit Techniken geistiger Arbeit vertraut zu machen, ist eine systematische Heranführung an den Umgang mit Nachschlagequellen und Nachschlagespeichern nötig. Dem Lehrbuch der Zukunft kommt dabei eine wichtige Rolle zu.

Soweit zu einigen perspektivischen Überlegungen. Wie aber ist die gegenwärtige Situation einzuschätzen ?

Wir werden dazu zunächst ein Urteil zu dem des neuen Lehrbuchs 6. Klasse /34/ anführen, weil es das zuletzt erschienene Lehrbuch ist. Dann werden wir speziell auf das Kapitel "C. Einführung in die Gleichungslehre ; Proportionen" dieses Lehrbuches eingehen.

Das neue Lehrbuch 6. Klasse stellt von der Gestaltung her einen echten Fortschritt auch gegenüber den Lehrbüchern 7. und 8. Klasse /31/ und /32/ dar, weil es mit gut überschaubaren übersichtlichen Zusammenfassungen für die einzelnen Kapitel arbeitet. Für den

[illegible] ist die Angabe von "Parallelaufgaben" begrüßenswert. [illegible]
fehlt leider. Auch sonst überwiegt hier noch die traditionelle Form. Übungsblätter fehlen, abgesehen von einigen Tabellen, die der Lehrer selbst in Übungsblätter umsetzen könnte. Die Unterrichtshilfe /112/ enthält weitere Vorschläge für Übungsblätter. [illegible]
Mittel ist auch damit nicht gelöst.

Es folgen nun einige spezielle Bemerkungen zum Kapitel C des [illegible]

Vom Inhalt her kommt das Kapitel unseren Vorstellungen sehr na[he], denn es vermittelt eine auf der Grundlage der Mengenlehre aufge[baute] [illegible]
Vorstellungen (Vgl. Lehrbuch 7. Klasse, 1965 /81/) korrekter [und] konsequenter ist. Wir würden allerdings in einigen Punkten noch weiter gehen. Das gilt z.B. für "Lösungsmenge". Wenn man richtig [illegible] Gleichung oder Un[gleichung] gleichung deren "Lösungsmenge" heißt, so sollte man dann auch [illegible] *und Ungleichung* [illegible]
se Forderung geht jedoch aus dem Lehrbuchtext nicht deutlich [illegible]
[illegible] : "Man kann auch schreiben .... " /112, S.159/. [illegible]
Angabe einer Lösungsmenge.

[illegible] Ergebnis eines derartigen inkonsequenten Vorgehens, das m[an] auch in den zur Zeit noch gültigen Lehrbüchern für die Klasse [illegible] und 8 /81/, /82/ vorfindet, konnte während der Hospitationen [im] [P]raktikum in den Jahren 1968, 1969 und 1970 verschiedentlich be[obachtet werden]. [illegible] in der fol- [illegible]

[illegible]

Im Aufgabenteil des Lehrbuchs 6. Klasse wird zwar einmal, auf Seite 171, die Angabe von Lösungsmengen gefordert, aber die umgekehrte Aufgabenstellung bleibt dann später (Seite 177, 27.,28.,31.,33.) inkonsequent. Es werden nicht Lösungsmengen, sondern Lösungen für bestimmte Gleichungstypen vorgegeben. Es wird außerdem von " x = 2 " als von der "Lösung" gesprochen, während weiter vorn (Seite 69) " x = 7 " als "letzte Gleichung" oder "Endgleichung" erscheint.

Besonders im Hinblick auf weitere Gleichungstypen - quadratische Gleichungen, Systeme von Gleichungen - aber auch auf die Behandlung allgemeingültiger Gleichungen halten wir auf Grund der Erfahrungen der vorliegenden Untersuchungen es für nötig, eine konsequente schriftliche Angabe der jeweiligen Lösungsmenge von Anfang an zu fordern, weil sie die Klarstellung des Lösungsbegriffs bedeutend unterstützt. Ferner sind "letzte Gleichung" und "Lösung(en)" dieser Gleichung klar zu unterscheiden. Eventuell sind von Indizes verwenden müssen oder doch die Schreibweise " [illegible]

Ferner möchten wir weiterhin zum Inhalt des Kapitels 3 bemerken, daß man durchaus auch Teilmengen von P bzw. P* als Grundbereiche wählen sollte. Wir vermissen auch eine Bemerkung darüber, welcher Grundbereich dann gemeint ist, wenn keine Angabe erfolgt. Das ist zum Beispiel bei den Verhältnisgleichungen der Fall. Außerdem sollte man erwägen, ob man nicht die Probe in zwei Teilen, d.h. also wie in den Unterrichtsversuchen, als obligatorisch fordern sollte. Schließlich halten wir es für zweckmäßig, wenn die Gleichungs-(Ungleichungs-) variable fast ausschließlich mit x bezeichnet wird.

Zum Kapitel Gleichungen im zur Zeit noch gültigen Lehrbuch 7. Klasse /81/ soll nichts gesagt werden, da ab Schuljahr 1970 ein neues Lehrbuch eingeführt wird und außerdem eine kritische Wertung bei [illegible] /52/ zu finden ist.

5.4. Zur Auswirkung auf die Praxis

Schon während der Untersuchungen erfolgte eine schrittweise Überführung von Ergebnissen in die Praxis. Im wesentlichen geschah das in vier Formen:

1) Lehrerweiterbildungsveranstaltungen verschiedenster Art

2) Schulpraktische Übungen, Seminare und Vorlesungen bei Studenten

3) Einflußnahme auf den Unterricht in einer 7. und 8. Klasse in Form eines "Kompromisses" zwischen gültigem Lehrplan und Plan des Lehrgangs

4) Veröffentlichungen

5.4.1. Lehrerweiterbildung

Vor allem zu Beginn der Untersuchungen waren viele Vorbehalte gegenüber einer "neuen" Behandlungsweise der Gleichungslehre bei den Mathematiklehrern abzubauen. Die Lehrerweiterbildungsveranstaltungen, die in der Stadt und im Bezirk Leipzig abgehalten wurden, [illegible] dische Erfahrungen bei einer "modernen" Behandlungsweise.

[illegible] die neuen Lehrpläne die Behandlung der Gleichungslehre [illegible] den [illegible] von den [illegible] tet wurde. [illegible] Kollege Voigt im Schuljahr [illegible] Vorbereitungsveranstaltung für die im Schuljahr [illegible] matiklehrer [illegible] durchgeführt, [illegible]

[illegible]

5.4.2. Ausbildung vo[illegible]

Im Verlauf der Untersuchungen wurden auch eine Reihe von Schulpraktikgruppen am Unterricht und an kleineren Teiluntersuchungen direkt beteiligt, um den Studenten einen Einblick in die methodische Forschung zu vermitteln. Es war weiterhin möglich, mit Studentengruppen in verschiedenen 8. und 9. Klassen Kapitel der Gleichungslehre in "eigener Regie" zu behandeln: Die Kollegen, die ihre Klassen zur Verfügung stellten, gaben uns die Möglichkeit, gewisse Elemente der "neuen" Behandlungsweise in den Unterricht einzubauen, wie z.B. die Probleme der Erfüllbarkeit von Gleichungen bezüglich verschiedener Grundbereiche oder die Behandlung von Bruchgleichungen usw.

Die Studenten beteiligten sich nach anfänglichen fachlichen Schwierigkeiten im allgemeinen mit großem Eifer an derartigen kleinen Untersuchungen, die man in Zukunft in weit stärkerem Maße zur Heranführung der Studenten an das wissenschaftlich-produktive Studium nutzen sollte.

In Einzel[illegible] 1965/66 und 1966/67 [illegible] die Studenten [illegible] die [illegible] [illegible]

5.4.3. [illegible]

In den [illegible] tion.

Beispielsweise wirkte sich das beim Lösungsweg für eine beliebige [illegible] folgendermaßen aus:

[illegible] : $x \in R$

[illegible] äquivalentes Um-

[illegible] zur letzten ("einfachsten") Gleichung aus [illegible] durchgeführt. [illegible] erfolgte durch Aufzählung aller Elemente: L = {..........}.
Problematisch war dieser Weg nur bei unendlichen Lösungsmengen, wie sie sich z.B. bei einer linearen Gleichung mit mehr als einer Variablen, bei Systemen von zwei linear abhängigen Gleichungen mit zwei Variablen oder auch bei Ungleichungen ergeben. In [illegible] der Schüler dann sein Ergebnis in Form eines [illegible] angeben.

Bei Bruchgleichungen wurden die aus der gegebenen Grundmenge auszuschließenden Elemente a_i durch Ungleichungen der Form $x \neq a_i$ notiert. Der Begriff Differenzmenge wurde schließlich auch noch eingeführt, um eine "Kurzschreibweise" für die neue [illegible] [illegible] von Gleichungen wurden gebührend berücksichtigt.

[illegible] Lehrplan 6. bis 8. Klasse /71/ [illegible]

[illegible] Jahr 1969/70 unterrichtete Kollege Voigt in einer 6. Klasse. Es zeigte sich, daß die in den Unterrichtsversuchen und [illegible]

[illegible] 1969/70 [illegible]

[illegible] Ungleichungen

[illegible] em des Arbeitens mit Strukturbildern ist ein Beitrag mit dem Titel [illegible]

[illegible] vorliegenden Untersuchungen hatten auch wesentlichen Einfluß [illegible] die völlige Neufassung des Kapitels "Algebraische Gleichungen [illegible] Gleichungen" für die nächste Auflage der Kleinen Enzyklo[illegible] [illegible]

6. Gesamtzusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde der Versuch unternommen, an einem speziellen mathematischen Stoffgebiet der Schule Probleme der Fähigkeitsentwicklung zu untersuchen und praktische Hilfen für die Durchsetzung der neuen Lehrpläne /71/ und /72/ zu liefern.

Gemäß der Zielstellung sollten dabei insbesondere theoretische und unterrichtsmethodische Probleme, die bei der Entwicklung der Fähigkeit, die Zusammenhänge zwischen den Begriffen und Aussagen und Methoden des Stoffgebiets "Gleichungen" zu erkennen, auftreten, im Vordergrund stehen. Wir meinen, daß die Zielstellung der Arbeit im wesentlichen erfüllt werden konnte.

Das spezielle Vorhaben wurde in das Gesamtanliegen der Entwicklung geistiger Fähigkeiten auf dem Wege über die Aneignung der geistigen Tätigkeiten des speziellen Stoffgebiets eingeordnet.

Die empirisch gewonnene Tabelle der Tätigkeiten für das Stoffgebiet Gleichungen (vgl. Tabelle 14) stellt dabei den Versuch dar, die stoffgebietsspezifischen Tätigkeiten auf gewisse mathematische Grundtätigkeiten bzw. gewisse komplexe geistige Tätigkeiten zurückzuführen. Es erfolgte damit eine Einordnung in den von der Forschungsgemeinschaft "Fähigkeitsentwicklung" aufgestellten Katalog der geistigen Tätigkeiten (vgl. Tabelle 13).

Wir halten in diesem Zusammenhang den Weg für gangbar, über die Analyse der speziellen Tätigkeiten der einzelnen Stoffgebiete zu einer empirischen Zusammenstellung aller im Mathematikunterricht benötigten mathematischen Grundtätigkeiten und damit zu einem System der mathematischen Tätigkeiten als einem Teilsystem eines Systems aller geistigen Tätigkeiten zu gelangen. Ein Überblick über alle im Mathematikunterricht zu erlernenden Tätigkeiten wäre eine wertvolle Hilfe bei der Steuerung der Fähigkeitsentwicklung.

Wie die Gegenüberstellung des hier vorgeschlagenen Lehrgangs und der neuen Lehrpläne /71/ und /72/ (vgl. Tabelle 3) zeigt, kann man die vorliegenden Untersuchungen berechtigterweise als einen Beitrag zur Durchsetzung der neuen Lehrpläne werten. Die Auswahl des Stoffgebiets Gleichungen als

inhaltliche Ausrichtung der theoretischen und experimentellen Untersuchungen hat sich als zweckmäßig erwiesen. Die mengentheoretische Betrachtungsweise bot darüber hinaus gute Ansatzpunkte für die Entwicklung der speziellen methodischen Hilfsmittel zur Unterstützung der Fähigkeitsentwicklung. Besonders die Strukturbilder und Handlungsvorschriften stellten eine gute Orientierungsgrundlage dar. Sie werden, weil sie auch als Anregung für andere Stoffgebiete dienen könnten.

Durch einen statistischen Vergleich der Ergebnisse der Kontrollarbeiten von Versuchs- und Vergleichsklassen konnte die Überlegenheit des Unterrichts auf der Grundlage des eigens für das vorliegende Vorhaben entwickelten Lehrgangs gegenüber dem "traditionellen" Unterricht nachgewiesen werden.

Die Verwendung der Fehleranalysen und insbesondere die Auswertung nach Problemkomplexen mittels der speziellen Tabellen und graphischen Darstellungen haben sich als brauchbares Hilfsmittel zur Kontrolle und Steuerung des Tätigkeitsvollzugs erwiesen. Auch hier halten wir eine Übertragung auf andere Stoffgebiete für möglich und nützlich.

Die enge Zusammenarbeit mit den Mathematiklehrern insbesondere der Versuchsklassen, die nicht nur beobachtend, sondern vor allem auch unterrichtend und lernend an den Untersuchungen beteiligt waren, hat die organische Einbettung des Grundanliegens des Unterrichtsversuchs in den gesamten Mathematikunterricht und darüber hinaus in die gesamte Bildungs- und Erziehungsarbeit der entsprechenden Klassen gewährleistet. Wenn wir abschließend das Vorhaben als gelungen einschätzen können, so hat die unterrichtspraktische Arbeit dieser Kollegen nicht unwesentlich dazu beigetragen.